

# Propuesta de enseñanza

# Matemática En el Segundo Ciclo

Mónica Agrasar  
Con aportes de Pierina Lanza,  
Guillermina Meana



## **El segundo tramo de la escolaridad primaria**

El Segundo ciclo es el ciclo “invisible”. Aparentemente no tiene problemas, pero eso se debe a que existe poca costumbre de analizar la información e indicadores directos de su rendimiento, a diferencia de primer ciclo, donde el fracaso se detecta como repitencia y al inicio de la escuela secundaria donde se lo detecta como deserción.

Si la propuesta de enseñanza del Segundo Ciclo es amplia, desafiante y variada en sus contenidos y tiene como foco el desarrollo de la capacidad de aprendizaje autónomo de los alumnos, se gestarán las condiciones que le permitan llevar a cabo sin dificultades la transición a la Escuela Secundaria.

### **La metodología de Progresión Asistida**

Esta metodología incluye un conjunto de propuestas y recursos pedagógicos orientados hacia el fortalecimiento de la tarea de enseñanza de los maestros del Segundo Ciclo de la escuela primaria. Se inspira en ciertas convicciones que actúan como premisas fundamentales:

- que todos los chicos tienen capacidades de aprendizaje, por el solo hecho de su condición humana;
- que las escuelas tienen mucho por dar a sus alumnos, y que a veces eso no ocurre por ciertas inercias pedagógicas o institucionales que inhiben la potencia de sus propuestas más allá de las dificultades de los contextos

Esta propuesta intenta recuperar la autoestima de los docentes y su confianza en la potencialidad de sus alumnos. Ambas han sido muy afectadas por una realidad muy cruel, pero también por corrientes de pensamiento que consideran imposible sobreponerse a esta situación.

También contribuye a profundizar una perspectiva de ciclo, útil para instalar procesos de mediano plazo que favorezcan la continuidad de la experiencia escolar de los niños y las niñas, la cual les permitirá conquistar crecientes capacidades para moverse con mayor autonomía en la escuela y para aprender.

### **Objetivos y criterios estructurantes**

Los objetivos principales que nos guían en la implementación de la metodología son:

- Fortalecer los aprendizajes básicos, promoviendo estrategias para el logro de aprendizajes de calidad en el Segundo Ciclo.
- Diseñar, aplicar y ajustar un dispositivo de trabajo con escuelas que atienden a matrícula en situación de pobreza, que permita la articulación de apoyos técnicos y propuestas de enseñanzas para estructurar un itinerario de mejoramiento en los resultados de aprendizaje.
- Desarrollar, junto a las escuelas, metodologías de gestión y organización institucional que garanticen logros de aprendizaje para la mayor parte de los niños.

## ¿Qué propone esta metodología por las escuelas?

Las acciones se estructuran en torno a 3 ejes:

- ‡ **La propuesta de enseñanza** centrada en la llamada *alfabetización avanzada*. Se propone ayudar a desarrollar en los alumnos y alumnas la capacidad de comprensión y producción de textos escritos en todas las áreas del conocimiento a través de metodologías que favorezcan el aprovechamiento intensivo de los textos de estudio. Asimismo, se propone apoyar en la construcción de una mayor formalización del trabajo en matemática, a través de metodologías que se centren en la resolución de problemas y la interpretación de información en textos de circulación social. Los docentes participan de las capacitaciones y aplican las secuencias didácticas
- ‡ **La propuesta de organización y gestión institucional focalizada** en la revisión del uso del tiempo, la asignación del personal docente y la organización de los grupos de alumnos. Teniendo en cuenta las situaciones de alumnos en sobriedad, estimula y acompaña iniciativas institucionales de aceleración. Los directivos participan en talleres de trabajo sobre el grupo promotor y realizan capacitaciones internas para la lectura y aprovechamiento de los materiales
- ‡ **La evaluación y seguimiento de los aprendizajes** de los alumnos. Se aplican instrumentos de evaluación para captar datos relevantes acerca del posicionamiento de los alumnos en el proceso de aprendizaje. Se interpretan los resultados para identificar los progresos y planificar las acciones específicas de apoyo para aquellos que lo requieran. Docentes y directivos participan de los ateneos de corrección y talleres de devolución y análisis de los resultados de las evaluaciones.

### La alfabetización avanzada como objetivo del Segundo Ciclo

Hablar de alfabetización en sentido amplio significa reconocer que, junto con el dominio de la lectura y la escritura, hay una diversidad de conocimientos y de procedimientos, y un conjunto de actitudes y valores que nos permiten comprender nuestro mundo y actuar en consecuencia. Por otra parte, se requiere un nivel mínimo de conocimientos y habilidades generales socialmente compartidas, no sólo para contribuir al desarrollo de todos los niños a nivel individual sino también a su formación social.

Leer comprensivamente, poder utilizar los números, disponer de conocimientos de medida y de espacio y desarrollar habilidades para producir textos acordes con usos socialmente relevantes y resolver creativamente problemas matemáticos, son las capacidades instrumentales que permiten el resto de aprendizajes escolares. Estas capacidades son esenciales para la comunicación de los niños y para el proceso de estructuración de niveles más complejos del pensamiento. Pero, además, son los parámetros usados por todas las escuelas en el momento de decidir el pase de grado o no de los alumnos.

## Contenido

<b>Introducción</b> .....	5
La enseñanza de las operaciones con números naturales en el segundo ciclo.....	19
Acerca del alcance de los contenidos en cada grado.....	21
Propuestas de actividades .....	22
Secuencia para usar la división en distintas situaciones y comparar distintas formas de calcular .....	23
La enseñanza de los números racionales en el segundo ciclo .....	29
Acerca del alcance de los contenidos en cada grado.....	30
Propuestas de actividades .....	32
1. Secuencia para registrar, interpretar y comparar cantidades y números usando expresiones decimales.....	32
2. Actividades para comparar números expresados en diferentes formas .....	36
3. Actividades para registrar y comparar cantidades y números usando fracciones .....	38
Son aspectos de la noción de fracción que se podrían desarrollar en 4º grado: .....	38
Son aspectos de la noción de fracción que se desarrollarán en 5º grado:.....	39
Son aspectos de la noción de fracción que se desarrollarán en 6º grado:.....	39
Situaciones de reparto para iniciar el trabajo en 4to, 5to y 6to grado.....	39
4. Actividades para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo con expresiones decimales.....	48
La enseñanza de la proporcionalidad en el segundo ciclo.....	59
Propuestas de actividades .....	64
1. Secuencia para analizar relaciones entre cantidades y comparar distintos procedimientos para calcular valores de cantidades que se corresponden proporcionalmente.....	65
2. Actividades para usar la proporcionalidad directa en el contexto particular de los porcentajes.....	68
3. Actividades para diferenciar la proporcionalidad directa de la inversa y comparar sus propiedades .....	70
Secuencia 1: Dividir en 4to grado .....	73
Secuencia 2: Decimales en 5to grado.....	76
Secuencia 3 Relacionar cantidades en 6to grado .....	79

## **Introducción**

Hoy la sociedad reclama cada vez más a todo ciudadano, una formación que le permita enfrentarse a situaciones muy diversas y cambiantes que requieren interpretar información y tomar decisiones para encontrar nuevas respuestas o formular nuevas preguntas.

Frente a esta necesidad, reconocida en los documentos curriculares, cabe preguntarse cuál es el aporte de la escuela a esta formación en un marco social complejo que la interroga acerca de qué oportunidades de aprendizajes es capaz de generar y sostener.

En principio, para que la escuela pueda cumplir con su responsabilidad de lograr que todos los alumnos y las alumnas alcancen los aprendizajes esperados, se necesita formular propuestas educativas que tengan en cuenta la singularidad de cada situación de enseñanza y de aprendizaje, en las que se interrelacionan un docente, un alumno o alumna y un saber dentro de un contexto sociocultural determinado.

Sabemos, por una parte, que cada año, un nuevo grupo de alumnos nos plantea un desafío que tiene características singulares e irrepetibles. Por otra parte, los conocimientos que enseñamos y nuestras estrategias de enseñanza también se modifican, respondiendo a los cambios que tienen lugar en la sociedad y en los campos de saber.

Pero, ¿cuál es la forma de responder a la diversidad y al cambio?

Una primera cuestión a tener en cuenta es que a lo diverso no puede responderse de una única manera. Las propuestas de enseñanza, entonces, tienen que adoptar formas diferentes según cada necesidad y cada contexto, reconociendo y aceptando como un hecho natural la diversidad de ideas, experiencias y actitudes de los niños y las niñas, de estilos y ritmos de aprendizaje, de capacidades y habilidades, de intereses y expectativas ante el aprendizaje escolar.

A partir de este reconocimiento, cada escuela, y cada docente, podrán elaborar una propuesta de enseñanza con características que promueven el éxito de los aprendizajes:

- Que incluya a todos los alumnos, cualesquiera sean sus puntos de partida, contemplando la composición diversa de los grupos de alumnos y alumnas y la aproveche como factor de enriquecimiento de los aprendizajes.
- Que se proponga la formación de alumnos y alumnas autónomos, promoviendo la reflexión sobre lo aprendido, aun con los más pequeños.
- Que adopte un modelo de intervención y ayuda pedagógica sobre la base de propuestas didácticas adaptadas a la capacidad, ritmo, motivación, intereses, posibilidades, etc., de cada alumno o alumna.
- Que incluya la concepción de la evaluación como un elemento esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- Que conciba el trabajo en equipo como facilitador de la construcción cooperativa del conocimiento.
- Que de lugar a la expresión y producción individual de cada niña y cada niño,
- Que brinde los apoyos necesarios para garantizar las trayectorias de aprendizaje de todos los alumnos.
- Que forme parte de un proyecto institucional articulado, flexible y adecuado a las necesidades de la comunidad de la que forma parte la escuela.

Quienes enseñamos necesitamos revisar permanentemente qué hacemos y fundamentalmente para qué lo realizamos, ya que las investigaciones didácticas aportan información para comprender los problemas de la enseñanza en las aulas y a la discusión de posibles alternativas para abordarlos.

En particular, al preguntarnos sobre la enseñanza de la matemática, encontramos que las investigaciones y los diseños curriculares actuales señalan la importancia de organizar

actividades que enfrenten a los alumnos de la escuela primaria a “problemas” de distinto tipo para que elaboren procedimientos propios de resolución y que luego puedan comparar las producciones realizadas, analizar su validez y producir textos con información matemática avanzando en el uso del lenguaje apropiado. Asimismo, se busca que los alumnos puedan hacerse preguntas y producir afirmaciones sobre los números y las operaciones, determinado en qué casos son válidas y que puedan explicitar sus conocimientos matemáticos, estableciendo relaciones entre ellos.

Esta perspectiva busca formar un ciudadano autónomo que pueda desplegar prácticas matemáticas diversas, adecuadas a distintas situaciones lo que supone, además de poder resolver problemas nuevos, tener control sobre los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos, y emplear los modos de hacer, comunicar y pensar propios de la disciplina.

En esta primeras páginas, desarrollamos algunos aspectos centrales de la tarea de enseñar matemática desde las actuales perspectivas didácticas y que están estrechamente relacionados con la necesidad de promover mejores aprendizajes para todos. Preguntarnos por el sentido de aprender Matemática, qué se entiende por enseñar mediante la resolución de problemas y qué se concibe como problema, y analizar cómo influye la gestión de la clase en el tipo de aprendizaje que logren los alumnos, nos brindará elementos para encontrar nuevos sentidos para las prácticas en el aula.

Luego, presentamos orientaciones para la enseñanza de temas centrales en el segundo ciclo, que incluyen propuestas de actividades organizadas en “Secuencias didácticas”, con sugerencias para su puesta en aula.

Dado que desde los propósitos del Programa se busca instalar procesos de mediano plazo que favorezcan la continuidad de la experiencia escolar de los niños y las niñas, hemos seleccionado abordar en este documento el eje de número y operaciones.

La elección de este eje se realizó tomando en cuenta los temas que se consideran centrales en las planificaciones que se desarrollan en las escuelas, las dificultades que diagnostican los maestros y los contenidos en los que las niñas y los niños presentan mayores dificultades en relación con su promoción.

En esta oportunidad, solo se toman algunos de estos contenidos con el propósito de comunicar una forma de trabajo que podría ser usada para planificar otros temas, necesarios para completar el trabajo en el área.

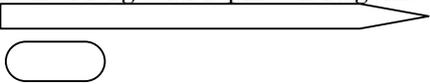
## Enseñar y aprender Matemática hoy

El gran desafío que se presenta hoy al enseñar Matemática es que los alumnos, además de adquirir técnicas, aprendan en qué situaciones pueden utilizarlas y recurran a ellas en forma autónoma, teniendo control sobre los resultados que obtienen y los procedimientos que usan, pudiendo evaluar su adecuación y sus límites, en relación con la situación que interesa resolver.

La escuela, que tiene el rol fundamental de ir introduciendo los conocimientos matemáticos de modo sistemático, deberá entonces dar al niño y a la niña la oportunidad de construir y aplicar ese conocimiento, es decir, de aprender una matemática con sentido. Pero, ¿qué entendemos por aprender una “matemática con sentido”?

### Los sentidos de la matemática y de su aprendizaje en la escuela

Si se concibe la matemática como una serie de resultados que están allí, que deben ser transmitidos: definiciones, propiedades, técnicas de resolución, y que los alumnos sólo deben enunciar las propiedades y manejar esas técnicas cuando se le soliciten de manera explícita, entonces se enseña de cierta forma y los alumnos solo construyen un “sentido escolar” para esas tareas. Esta concepción se ha construido, por ejemplo, a partir de la reiteración de propuestas de enseñanza como las siguientes:

<p>Marcela salió a hacer las compras y gastó en la verdulería <math>\frac{1}{3}</math> del dinero, luego gastó en el supermercado <math>\frac{3}{4}</math> del dinero que le quedaba. Cuando regresó a su casa tenía \$12.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Cuánto dinero tenía al salir de su casa?</li> <li>¿Cuánto gastó en la verdulería?</li> <li>¿Y en el supermercado?</li> </ol>	<p><i>¿Cómo sabe Marcela que gastó un tercio de su dinero si no sabe cuánto dinero tenía al salir de su casa? Y si sabe que en el supermercado gastó <math>\frac{3}{4}</math> del dinero que tenía es porque sabe cuánto gastó.</i></p>
<p>Medí el largo del lápiz con la goma</p> 	<p><i>¿Quién necesita medir el largo de un lápiz? ¿Para qué? ¿Por qué lo haría con una goma?</i></p>

En estos casos, la tarea tiene algún sentido solo en el ámbito de la escuela y la posibilidad de utilizar lo aprendido en otras situaciones de la vida cotidiana queda a cargo de los niños, y no es trivial ni mucho menos automática. Si desde el primer ciclo cuando se abordan las operaciones se proponen situaciones donde, por ejemplo, se pide averiguar cuántos ratones cazaron entre dos gatos o cuántos pajaritos quedaron en el árbol si había 25 y se volaron 17, esto solo contribuye a instalar un cierto funcionamiento escolar en el que los problemas son ‘de suma’ cuando en el enunciado dice en ‘total o entre todos’ y son ‘de resta’ si dice ‘quedaron’. Más adelante, cuando se les pide a los alumnos que elaboren un problema que se resuelva con  $1280 + 3605$  se encuentran producciones como:

<p>A la mañana Julia juntó 1280 rosas y a la tarde 3605 margaritas. ¿Cuántas flores juntó en total?</p>	<p>Si bien , en la escuela, el problema “es de suma” la situación no resulta verosímil.</p>
---	---

Frente a este tipo de propuestas, muchos niños se adaptan y avanzan asumiendo que “hay que hacer” lo que indica el maestro, pero otros tienen dificultades ya que no comprenden por qué se hace una operación u otra.

Cuando se presenta un nuevo desafío que “no se parece” a las actividades realizadas en la escuela, aún los niños que han tenido cierto éxito escolar pueden encontrar dificultades. Otros niños, no pueden relacionar lo que saben con las exigencias escolares bajan los brazos y se asumen como poco capacitados para la matemática. Numerosas investigaciones muestran que niños que “no resuelven bien” en la escuela, pueden realizar tareas matemáticas complejas fuera de la escuela.

Concebir que lo que tienen que saber las niñas y los niños al finalizar la escuela es solamente un conjunto de resultados y técnicas memorizadas, no resulta operativo en términos de asegurar la disponibilidad de lo estudiado. Estas técnicas, cuya justificación no se trabaja, suelen olvidarse o confundirse.

Es cierto que los alumnos tienen que aprender que existen determinadas técnicas y un modo de trabajar propios de la matemática, que son útiles para enfrentarse a ciertos problemas, y que ellos deben ir afinando su dominio en las distintas etapas de estudio, pero esas herramientas tienen su razón de ser y no son creaciones escolares arbitrarias.

Asociar la enseñanza de cada conocimiento matemático a sus “razones de ser”, es considerar que la matemática, aún la más elemental, ha sido generada para dar respuesta a problemas a los que se enfrentan las personas en la sociedad.

*Por ejemplo, contar una colección para saber cuántos hay permite volver a ella cuando sea necesario, por ejemplo saber cuántas cabras se llevan a pastar permite saber al regresar si están todas o alguna se perdió, saber cuántos niños hay en un aula permite decidir cuántas sillas poner o cuántos cuadernos se necesitan.*

*Multiplicar el valor de una cuota por la cantidad de cuotas permite conocer la diferencia entre el precio de un artículo financiado o en efectivo.*

*Calcular el precio unitario de dos marcas que ofrecen el mismo producto, en envases de distinta cantidad a distinto precio, permite decidir qué oferta es más conveniente.*

La matemática es un campo de conocimientos en el que trabaja una cierta comunidad que desarrolla prácticas de producción. Las nociones que se crean y recrean en estas prácticas, van evolucionando con el tiempo y adquiriendo distintas formas, según los usos que de ellos hacen distintos grupos culturales, en distintas instituciones. Estas prácticas, estas “formas de hacer” surgen para dar respuesta a ciertos tipos de problemas y se caracterizan por un modo particular de razonar tomando ciertos puntos de partida y de comunicar los resultados utilizando un lenguaje específico. Desde esta perspectiva, todo niño o niña que posea una alfabetización básica tiene que poder iniciarse en estas prácticas, estudiando una matemática con sentido y reconociendo el valor que estos conocimientos tienen para su vida.

Saber matemática desde esta perspectiva requiere dominar los conocimientos de esta disciplina para utilizarlos como instrumentos en la resolución de problemas, y también para definirlos y reconocerlos como objetos de una cultura a través de un lenguaje específico. Además de reconocer las ocasiones de uso de la matemática que aprenden, estableciendo relaciones con las prácticas de su entorno social, los alumnos deben poder enunciar propiedades y utilizar técnicas en un cierto tipo de registro formal, anticipando los desafíos de su vinculación con otros mundos de conocimiento.

Los números, las figuras y las relaciones tienen variadas representaciones que nos permiten trabajar con ellos respetando ciertas reglas para que los resultados que obtenemos sean aceptados como válidos. De este modo, la posibilidad de avanzar en la comprensión de un concepto implica, además de poder usarlo para resolver distintas situaciones, conocer sus propiedades y reconocerlo en sus distintas representaciones pudiendo elegir el más conveniente y pasar de uno a otro en función del problema a resolver.

Por ejemplo, la idea de mitad puede escribirse como  $\frac{1}{2}$ ; 0,5; 0,50; 50% y según la situación en la que se usa, se elige una representación o otra.

Si se tiene que operar con  $\frac{1}{3}$  tal vez convenga usar esa fracción y no su expresión decimal que es periódica, y que no es lo que “se ve” en el visor de la calculadora  $0,3333333 \neq 0,3$ .

Saber que multiplicar 460,75 por 0,25 equivale a dividir por 4 permite anticipar que, aunque se haya multiplicado lo que podría hacernos pensar que el resultado será mayor, está bien obtener un número menor que 460 y mayor que 100.

### **¿Qué hacer en la escuela?**

En la escuela los niños deberían, en principio, resolver problemas mediante procedimientos que ellos produzcan, tomando decisiones en ese proceso en función de lo que saben, para arribar luego a distintas técnicas disponibles para las diferentes situaciones planteadas. Luego de la resolución, habrá que plantear preguntas que permitan a los alumnos reflexionar sobre los conocimientos utilizados por ellos, para explicar o fundamentar lo realizado, y el docente tendrá que realizar una síntesis, introduciendo el vocabulario y las escrituras específicas que se requieran

Trabajando con esta perspectiva, no se propone una resolución única para los problemas al inicio de la clase y luego se escribe en el cuaderno y se ejercita.

La idea es que, según lo que el maestro decida, cada niño o cada grupo vaya escribiendo el procedimiento que “inventa” en su cuaderno. Cuando todos tienen su resolución, se explican los procedimientos distintos o se escriben en el pizarrón para que se pueda debatir, se analizan las distintas formas de hacerlo, se explican los errores y, con la ayuda del maestro, se obtienen conclusiones para todos.

Estas conclusiones serán el punto de partida para que el maestro vaya vinculando lo que se produjo en clase con las escrituras más formales o las técnicas a las que desee arribar como meta, en un proceso que llevará tiempo y actividades secuenciadas convenientemente.

Luego cada niño podrá trabajar partir de lo que sabe en forma individual en nuevos problemas, no sólo resolviendo sino también inventando otros o elaborando más preguntas. De esta forma se promueve un aprendizaje colectivo, cooperativo, que se complementa con actividades individuales en la que el/la niño/a vaya afianzando sus potencialidades.

Este modo de enseñar matemática es diferente del modelo en el que el maestro es el que sabe y muestra y el niño/a escucha, copia y repite. Se parte del convencimiento de que todos los niños y niñas pueden construir su aprendizaje, todos pueden “hacer matemática”.

### **La planificación de la enseñanza**

Aprender matemática está estrechamente ligado a la resolución de problemas y, en esta actividad, están presentes las formas propias de la disciplina para representar definir y comunicar procedimientos y resultados tanto en forma oral como escrita. Esto se realiza en el marco de un trabajo colaborativo entre pares, y con el docente, que siempre incluye el análisis del campo de validez de las producciones obtenidas.

Desde esta perspectiva, la resolución de problemas es la estrategia de enseñanza privilegiada, y por eso nos detendremos en especificar qué entendemos por “problema”, qué problemas es importante presentar y cómo conducir estas clases.

### **¿Qué problemas elegir?**

Partimos de la formulación siguiente, planteada en términos cognitivos, donde “dificultad” refiere al conflicto entre lo ya conocido por quien aprende y un medio problemático al que habrá que adaptar los conocimientos de iniciales para generar unos nuevos.

*“Se entiende por problema toda situación que lleve a los alumnos a poner en juego los conocimientos de los que disponen pero que, a la vez, ofrece algún tipo de dificultad que torna insuficientes dichos conocimientos y fuerza a la búsqueda de soluciones en las que se producen nuevos conocimientos modificando (enriqueciendo o rechazando) los conocimientos anteriores”. (Brousseau en Parra, Broitman e Itzcovich, 1996, p 6<sup>1</sup>).*

Si nos referimos a los problemas en relación al modo en que están presentes en ellos los conocimientos matemáticos, podemos decir que éstos aparecen contextualizados, funcionando en una situación y no formalmente expresados en una definición.

Al resolver la situación, los conocimientos matemáticos se usan y se transforman, lo que permite generar una respuesta, tienen el carácter de “herramienta” para el trabajo matemático.

*Por ejemplo, si se trata de multiplicar  $25 \times 199$  y se calcula mentalmente  $25 \times 200$  y luego se resta al resultado se está usando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta como una herramienta para facilitar el cálculo.*

Ahora bien, en la enseñanza, el proceso no termina allí, es necesario descontextualizar los conocimientos utilizados, precisarlos y darles una forma coherente con el modo en que son conocidos en la cultura matemática, acercándolos a su formulación como “objetos” teóricos. Esto último es lo que permitirá luego reconocerlos y utilizarlos nuevamente en otras situaciones.

*Por ejemplo si se pregunta si es cierto que para dividir da lo mismo descomponer el dividendo en una suma, dividir cada sumando y sumar los cocientes o descomponer el divisor en una suma, dividir el dividendo por cada uno de esos números y luego sumar los cocientes, se trata de estudiar como objeto la propiedad distributiva para el caso de la división.*

Así, a lo largo de una clase, de varias, o de una secuencia se da un juego entre ambos caracteres, “herramienta” y “objeto” que va contribuyendo de la noción que se estudia.

### **¿Siempre conviene que los problemas sean tomados de situaciones cotidianas?**

El plantear que los conocimientos matemáticos se presentan contextualizados en los problemas, nos lleva a interrogarnos sobre qué contextos serán los más adecuados para la enseñanza de cada una de las nociones a enseñar.

En principio, al elegir los problemas, será esencial revisar las instrucciones que presentamos, pues muchas veces se incluyen preguntas que carecen de sentido en sí mismas, pues no aluden a problemas reales o posibles. Por otra parte, es tan importante que los contextos se refieran a situaciones o escenas de la vida cotidiana retomando una variedad de experiencias de los niños en su comunidad como que acerquen otras realidades, más o menos lejanas pero interesantes y posibles de ser comprendidas a través de información ofrecida a través de distintos medios: imágenes, libros, programas de televisión, videos, páginas en Internet.

Estos contextos que llamamos extramatemáticos, se diferencian de aquellos que denominamos matemáticos, y que también deben incluirse para completar el estudio de las distintas nociones. Estos últimos, implican preguntar sobre números, operaciones o figuras para establecer relaciones entre ellos y avanzar en un uso cada vez más general y posible de ser aplicado a futuro.

*Por ejemplo, cuando se pregunta si dados dos números cualesquiera siempre se puede encontrar otros números entre ambos o cuando se propone comparar dos procedimientos de cálculo para ver si son o no correctos.*

Un juego, un acertijo o un desafío numérico también pueden dar lugar a la resolución de buenos problemas en la clase.

<sup>1</sup> Todos pueden aprender Matemática en 2º, p 47

Lo que resulta central en todos los casos es que el contexto sea significativo para los niños, es decir, que los conocimientos involucrados en el problema deberán ser interesantes para él e implicarán un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y sus experiencias sociales y culturales previas. En este sentido, que algo resulte significativo para el niño depende de sus posibilidades de relacionar lo que se pregunta con lo ya conoce sobre la matemática (significatividad cognitiva) y con sus experiencias de vida (significatividad cultural).

También es necesario tener en cuenta que para una misma una noción matemática puede ser usada con distinto significado.

Por ejemplo, una misma fracción en un caso puede ser usada para expresar el resultado de un reparto, en otro el de una medición y, en otro, una constante de proporcionalidad. Una multiplicación puede usarse para calcular un área o “una parte de una parte”.

Cada uno de estos significados pone en funcionamiento aspectos distintos del concepto en estudio y presenta distinta complejidad, lo que requiere de una planificación cuidadosa a lo largo del ciclo.

### ¿Por qué incluir distintas formas de representación?

Otro aspecto central que es necesario tener en cuenta al proponer problemas es que cada noción matemática, cada relación, cada propiedad, puede ser representada en forma escrita de diferentes formas.

Esta es una cuestión que, en general, no ha sido tenida en cuenta en la enseñanza primaria y, por el contrario, se ha trabajado con una única forma de representación dando por resultado que los niños no puedan reconocer bajo otras escrituras ideas que ya conocen. Así por ejemplo, reconocen el producto de  $17 \times 25$  en la primera forma pero no en las otras dos.

$$\begin{array}{r}
 17 \\
 \times 25 \\
 \hline
 85 \\
 34 \phantom{0} \\
 \hline
 425
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 17 \times (20 + 5) \\
 17 \times 20 + 17 \times 5 \\
 340 \quad + \quad 85 \\
 \hline
 425
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 17 \times 5 = 85 \\
 17 \times 10 \times 2 = \underline{340} \\
 \hline
 425
 \end{array}$$

Es por esto que más allá de las distintas representaciones que aparezcan durante la resolución de los problemas también se incluyan tareas específicas para analizar otras escrituras y otros procedimientos para los mismos problemas.

Por otra parte, en los enunciados de las actividades, es importante variar el modo en que se presenta la información alternando distintos tipos de escrituras numéricas, gráficos y expresiones en el lenguaje coloquial.

Es importante que los niños puedan conocer las diversas formas de representar una idea matemática y cambiar la representación según convenga a la situación en la que están trabajando con ella. Al trabajar con distintas representaciones para una misma noción y comparar distintos procedimientos para resolver un mismo problema, a la vez que se habilita la participación de todos, se enriquece el sentido que los alumnos van construyendo de la noción en estudio.

Articular sus distintas representaciones es esencial para la construcción de cada concepto, pero trata de un proceso de largo alcance que se inicia trabajando en cada registro con sus símbolos y reglas para avanzar luego a la posibilidad de pasar de un registro a otro.

En relación, por ejemplo, con los números racionales en 4to grado se trabajan las fracciones independientemente de las expresiones decimales. Cada tipo de representación está ligado a unos contextos de uso, unas reglas de escritura y de cálculo que no parecen estar relacionadas. Aunque dominen las equivalencias en el contexto del dinero pueden no advertir que los centavos son centésimas partes. Del mismo no hay “nada en común” entre  $3/4$  litros de leche y \$ 0,75 pues fracciones y decimales se encuentran todavía muy ligadas a los contextos particulares de uso. Es

más, esta separación a veces se mantendrá, por ejemplo decimos  $\frac{1}{2}$  hora y no usamos habitualmente 0,5 horas, ni decimos medio peso para referirnos a \$ 0,50.

A la vez, como planteamos antes, una misma expresión puede estar designando situaciones de uso distintas.

Esta variedad de usos para las fracciones se va abordando en un trabajo que se extiende durante todo el Segundo Ciclo y al que se suma luego la elaboración y el análisis de procedimientos de cálculo.

Para las expresiones decimales se va llevando un proceso paralelo que, a medida que avanza el ciclo va encontrando puntos de contacto.

Una buena ocasión para vincular expresiones fraccionarias y decimales es el análisis de los algoritmos tradicionales para multiplicar y dividir expresiones decimales. Para entender por qué se suman las cantidades de cifras decimales de los factores para obtener la cantidad de cifras decimales del producto basta expresar los números como fracciones y analizar el producto de los denominadores.

Al llegar a 6to o 7mo grado sería deseable que los alumnos pudieran decidir, de forma autónoma cuando usar un tipo u otro de representación, pero para llegar a esta meta será necesario articular con los colegas el alcance del trabajo en cada grado.

El campo de los números racionales presenta un panorama complejo y diverso cuyo tratamiento que debe ser distribuido en los distintos grados para que sea posible, por una parte, dar lugar a un trabajo reflexivo para cada tipo de representación, y, por otra, disponer de tiempo suficiente para ir articulándolas. Si se trata de “dar todo” en cada grado, la cantidad de aspectos a abordar, hace que no se pueda dar tiempo suficiente a los alumnos para involucrarse en un trabajo como el que hemos descripto antes. Ocurre entonces que “se ven” todos los temas pero no hay construcción de sentido ni posibilidad de identificar lo que se sabe y, al año siguiente, no quedan huellas del trabajo, muchas veces muy intenso, realizado. Parece que los alumnos no recuerdan “nada” y que hay que empezar “de cero”. La solución para este problema es necesariamente institucional y requiere de acuerdos entre los maestros del ciclo que puedan sostenerse para cada cohorte, similares a la planificación que realiza un maestro de plurigrado.

### **Varios problemas ¿una secuencia?**

Si afirmamos que los niños avanzan en la construcción del sentido de los conocimientos matemáticos por medio de la resolución de problemas y de la reflexión sobre estos, desde el momento en que se inician en el estudio de la matemática, cabe preguntarse ¿cómo se seleccionan y se organizan estos problemas? ¿en qué orden? ¿qué otras actividades plantear?

En principio, según lo que hemos señalado antes, debemos tener en cuenta la diversidad de contextos, significados y representaciones propios de la noción matemática que se quiere enseñar. Además habrá que considerar que, en cada situación, son varias y diferentes las tareas que podrían realizar los niños, entre ellas resolver y dar una respuesta, explicar cómo resolvieron, comparar sus procedimientos con los de otros niños, justificar el por qué de su respuesta, analizar si la explicación o la justificación de otro le parece bien y por qué.

Sin embargo, esta variedad no puede abordarse simultáneamente y, por esta razón, se organizan secuencias con propósitos definidos en relación con la enseñanza de un mismo contenido, tomando solamente uno o dos aspectos del mismo.

Esta forma de organizar las actividades de enseñanza tiene varias ventajas. Como cada actividad de una secuencia se apoya en algo elaborado en la actividad anterior, es posible sostener un trabajo articulado en clases sucesivas sobre un mismo contenido. Volver sobre algo que se hizo el día anterior para revisarlo o para usarlo en un nuevo problema, manteniendo el foco de trabajo, permite que los niños que tuvieron dificultades en la primera o segunda tarea encuentren una nueva oportunidad en las siguientes, y que aquellos alumnos que lo hicieron con más facilidad, afiancen lo aprendido o descubran nuevas relaciones. Este trabajo por aproximaciones sucesivas a

la noción o concepto en elaboración que se quiere enseñar, da lugar a que más niñas y niños avancen en el logro del propósito al que se apunta.

Una secuencia puede tener diferentes duraciones. Cuando requieren de dos o más semanas de trabajo, al finalizar cada etapa de trabajo, se revisa el proceso, se recuperan las conclusiones del grupo y se sintetizan los aspectos que es necesario recordar y, de este modo, la síntesis resulta significativa para el grupo de alumnos. Este modo de elaborar “aquello que hay que saber” como producto del trabajo de la comunidad clase, es para los niños muy diferente que recibirlo como explicación de la maestra al inicio de la clase. Cuando se muestra al inicio “cómo resolver” lo que suele suceder es que algunos niños se adaptan fácilmente a hacer lo que se les dice, aunque no comprendan por qué, mientras que otros quedan “afuera” y cuando están tratando de sumarse a la tarea ya hay que hacer otra cosa distinta.

La organización en secuencias también permite un mayor control sobre los aspectos del contenido seleccionado y se puede monitorear mejor el avance de cada uno de los alumnos. Cuando se abordan a la vez muchos contenidos, o muchos aspectos de un mismo contenido, resulta difícil detectar a qué causas podrían atribuirse las dificultades de los alumnos y, en consecuencia, no es posible precisar qué intervenciones serían las más adecuadas para ajustar el trabajo en la clase de modo que todos aprendan.

Otra cuestión que es importante tener en cuenta al organizar secuencias, es incluir en ellas actividades de familiarización con los conocimientos aprendidos durante la resolución de problemas. Estas son actividades que permiten a los niños avanzar en el dominio de los nuevos conocimientos para que aquello que se aprendió se pueda usar con mayor seguridad y rapidez, y en situaciones cada vez más variadas.

Son, en general, actividades que los niños y niñas realizarán en forma individual, algunas veces en la clase y otras como tarea para la casa, cada uno a su ritmo. La cantidad y variedad que cada uno necesite deberá ser decidida por el maestro en función de la evaluación que haga del progreso de cada niño.

Si bien los criterios que permiten organizar secuencias dependen de los contenidos seleccionados para enseñar y los propósitos del docente y por lo tanto son muy variados, a modo de ejemplo, explicitamos algunos posibles. Cabe aclarar que cada uno puede dar lugar a secuencias más o menos extensas y que a su vez pueden estar incluidas en secuencias que articulan varios propósitos. Por ejemplo, que los alumnos:

- \* resuelvan y comparen problemas donde una operación tiene diferentes significados,
- \* produzcan diferentes formas de hacer un cálculo, las comparen y avancen hacia el algoritmo convencional,
- \* usen distintas descomposiciones de los números y propiedades de las operaciones para elaborar estrategias de cálculo mental,
- \* exploren distintas propiedades de la proporcionalidad para determinar la conveniencia de su uso según los números involucrados.

## ¿Cómo desarrollar las clases?

La forma de organización y gestión de la clase dependerá de las diversas formas que puede tomar el trabajo matemático, del tipo de interacciones que intentamos promover y de los significados y representaciones de los contenidos a abordar.

Podemos organizar la tarea en pequeños grupos, en parejas, individualmente o con el grupo total equilibrando la presencia de distintas agrupaciones en pos de promover y sostener un ámbito en el que convivan el debate matemático colectivo y la reflexión individual, indispensables para el aprendizaje de los conceptos matemáticos y del fortalecimiento de competencias ligadas a la comunicación y al trabajo con otros.

Es importante tener en cuenta que, para algunos grupos de alumnos, generar este clima de estudio es más una meta que un punto de inicio. Si esto es así convendrá ir proponiendo metas cortas y claras, acordadas con los niños, evaluando junto con ellos el progreso de los debates en la clase.

Actualmente, instalar en las aulas la resolución de problemas como estrategia docente es un gran desafío pues, en general, los docentes no hemos sido formados desde este enfoque. Para que los alumnos construyan el sentido de los conocimientos matemáticos además de trabajar con problemas bien elegido, es necesario que en la clase se desarrollen momentos de trabajo con diferentes propósitos. Consideremos esos momentos y el para qué de cada uno.

En primera instancia, los chicos deben tener un momento individual para enfrentarse al problema presentado con los conocimientos que tienen disponibles. Luego se podrá elaborar un procedimiento de resolución de forma individual, en parejas y en grupos. Conviene que durante la exploración del problema el docente pase entre las mesas para animar a los alumnos a avanzar, sin sugerir soluciones y para poder detectar los procedimientos diferentes que van apareciendo o las discusiones que sería interesante abordar en la puesta en común. Por ejemplo, si se trata de un problema que involucra cálculos, se analiza cuáles son los procedimientos más económicos, cuáles los más fáciles aunque sean más largos, cuáles los que puedan resultar erróneos y las causas del error, las principales dificultades encontradas, etc.

En el caso en que el maestro haya observado que los trabajos de los grupos son muy similares, elige para analizar aquellas producciones que permitan generar algún tipo de debate. De otro modo, la comunicación reiterada de un mismo procedimiento no resulta productiva para el conjunto de la clase.

Al analizar las diferentes soluciones, se tendrá que valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no llegar a una solución correcta al problema planteado. Es más, muchas veces son las producciones erróneas las que dan lugar a los intercambios más fértiles en relación con el aprendizaje. Es importante destacar que no se trata de poner en común “lo que hizo cada grupo” ya que puede haber producciones similares, sino de analizar entre todas las alternativas que surgieron para la resolución del problema. Es más no deben analizarse necesariamente todas las alternativas que surjan ya que algunas podrían desviar demasiado el foco de atención. Si no hay variedad, tal vez lo que se pone en común y se discute es cómo explicitar y registrar en un afiche el procedimiento usado por todos buscando precisar cuáles son sus características y sus límites.

Gestionar este momento, junto con la elección de los problemas, es uno de los mayores desafíos para un maestro. Al respecto María Emilia Quaranta y Susana Wolman (2004) hacen un interesante aporte en el artículo *Discusiones en las clases de matemática : qué, para qué y cómo se discute* en Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B : análisis y propuestas. Buenos Aires : Paidós, p. 189-243.

Para finalizar el debate no debe faltar la síntesis a cargo del maestro y el registro de las conclusiones en el pizarrón, en los cuadernos o en una cartulina que se cuelga en la clase en el que se identifican los conocimientos matemáticos utilizados empleando el vocabulario específico. El docente destaca lo que los alumnos deben retener y se los señala.

Sin esta síntesis no es posible que los niños y las niñas puedan reconocer esos conocimientos y utilizarlos en nuevas situaciones.

A partir de esta síntesis se podrá abrir nuevas preguntas para el problema inicial abriendo una nueva investigación, proponer una nueva tarea, relacionar con otros conocimientos anteriores.

Si bien no es posible definir a priori momentos fijos, dado que las situaciones que se presentan a los niños podrían tener distintas características generando dinámicas diferentes en la clase la descripción que sigue puede ser orientadora de un esquema general.

### **Momentos de la secuencia de enseñanza.<sup>2</sup>**

#### *a) Presentación del problema:*

El docente les propone trabajar en pequeños grupos (de no más de 5 integrantes), plantea la consigna y se asegura, a través de una discusión con los alumnos, que dicha consigna tenga sentido para cada uno de ellos. Es importante plantearles que cada equipo debe pensar y discutir lo que dice el enunciado y luego registrar en un papel lo que hacen para averiguarlo.

#### *b) Fase de investigación*

Situación de acción: Los alumnos, para resolver el problema, intentan poner en juego sus conocimientos previos, exploran, hacen observaciones, elaboran estrategias de resolución, llegan a conclusiones y obtienen resultados.

Situación de formulación: Los alumnos comunican informaciones a sus compañeros utilizando su lenguaje habitual y luego las van perfeccionando y adecuando a la situación, teniendo en cuenta los objetos y relaciones presentes en dicha situación. Paralelamente, el maestro circula por el aula, observa y registra los procedimientos que utilizan los alumnos, detecta las dificultades, *pero se abstiene de intervenir dando soluciones*; en todo caso, formula nuevas preguntas orientadoras.

#### *c) Presentación de resultados o situación de validación*

Es el momento del balance de lo realizado. Luego de cierto tiempo de trabajo, los equipos pasan a mostrar sus formas de solución al resto de los compañeros. Se comparten y discuten las soluciones presentadas por cada grupo. Los alumnos argumentan para defender sus afirmaciones. Toda la clase discute los distintos procedimientos, mientras el docente coordina el debate. Se analiza cuáles son los procedimientos más económicos, cuáles los más fáciles aunque sean más largos, cuáles los que puedan resultar erróneos y las causas del error, las principales dificultades encontradas, etc.

#### *d) Fase de síntesis. Institucionalización*

Luego de haber trabajado en las distintas situaciones, los alumnos deben aprender la significación socialmente establecida que tienen los conocimientos que han adquirido y adoptar las convenciones sociales pertinentes. Esta fase del trabajo requiere un rol muy activo del docente. Consiste en destacar las características importantes del problema, es decir, el objetivo de aprendizaje propuesto por el docente. A partir de las producciones de los alumnos, el docente identifica lo que deben retener y se los señala.

Esta fase es indispensable para que no se pierdan los beneficios de la fase de acción.

<sup>2</sup> En el desarrollo de este ejemplo se adapta la clasificación que propone Brosseau acerca de las situaciones didácticas, en Grecia Gálvez: *La Didáctica de las matemáticas*: aportes y reflexiones. Paidós Educador. 1994. Bs.As.

Cabe aclarar que situaciones de acción y formulación podrían sucederse, superponerse, alternarse durante el transcurso de una misma clase y lo mismo ocurre con las situaciones de validación. También podría ocurrir que en una clase se priorizara un tipo de trabajo más que otros, pero en una secuencia de varias actividades debieran estar presentes estas tres formas de vincularse con el conocimiento dado que suponen desafíos cognitivos diferentes. Resolver, resolver y resolver, sin generar momentos de comunicación, reflexión y validación de lo actuado solo garantiza un “entrenamiento” en la resolución de un cierto repertorio de problemas pero no da lugar a una verdadera práctica matemática ni al desarrollo de competencias. Ningún matemático aceptaría que su trabajo ha terminado si no ha previsto alguna forma de comunicar sus resultados y procedimientos o no tiene argumentos para “defender” ese trabajo frente a otro.

Las formas de representación en matemática son muy importantes, pues solo accedemos a los objetos que estudiamos a través de ellas y, a la vez, ellas mismas también se constituyen en objeto de estudio. Conocer las distintas expresiones que usa la matemática para representar una misma idea permite identificarla en distintos contextos, utilizarla para resolver problemas y, eventualmente, cambiar a otra representación si esto habilita procedimientos más económicos o permite comunicar la información más eficazmente.

En este sentido habrá que estar atentos a la diversidad de representaciones que produzcan los alumnos y, si esta variedad no aparece, es responsabilidad del docente mostrar otras formas para contrastarlas con las producidas por el grupo.

Más que seguir las fases planteadas por Gálvez de manera lineal lo importante es dar lugar a los alumnos para que tomen decisiones en relación a su producción personal, puedan comunicar sus procedimientos y resultados, puedan comparar las diferentes producciones realizadas para determinar si son correctas o no, o si pueden mejorarse dando los argumentos necesarios y que el docente ayude a los alumnos a formular las conclusiones a las que arribe el grupo de la clase en un registro escrito que se convierte en la memoria de lo actuado. También es importante, cada vez que sea posible pero sin forzar la situación, generar preguntas que permitan explorar cómo variaría la respuesta a una pregunta si se cambia uno de los datos usados para hallarla, para promover el proceso de generalización de la noción en estudio. No es lo mismo una afirmación que resulta verdadera sólo para algunos casos particulares que otra que lo sea en general. Que una propiedad se cumpla para ciertas figuras, para ciertos números, no implica necesariamente que se cumplirá para otras figuras u otros números.

Evaluar el grado de validez de una afirmación es un aspecto esencial para lograr el avance esperado en el conocimiento matemático: *Las exigencias de explicitación, de argumentación, de revisión y de validación brindan oportunidades para transformar el conocimiento y hacerlo más reconocible; son, por esto, elementos esenciales en la construcción del sentido de los conocimientos*<sup>3</sup>.

Con respecto a la institucionalización por parte del docente, ésta no debe pensarse ligada exclusivamente al cierre de la clase. El maestro puede hacer institucionalizaciones parciales en cualquier momento de la clase, para aclarar algo necesario para hacer avanzar los procedimientos en curso o en función de la pregunta de un grupo o de un alumno. El cierre de la clase usualmente es pensado como una síntesis en la que se precisan las conclusiones y se establecen relaciones entre las nociones abordadas. Esto puede ocurrir de este modo o podría hacerse con un resumen del proceso en marcha, sin que esto se tome necesariamente como válido ya que sería explicitar “hasta dónde llegamos hoy” para seguir trabajando mañana, o también, y después de una primera conclusión, se podrían registrar nuevas preguntas que se abren.

Sí es importante que al finalizar cada clase quede claro cuál es el estado del proceso de estudio para poder retomarlo en la clase siguiente y que en una secuencia de actividades haya momentos claros de institucionalización, de recuperación y sistematización de los conocimientos abordados y de evaluación del proceso de estudio.

---

3GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Marco General del Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica. 1999

En el segundo ciclo es central que los alumnos vayan involucrándose cada vez más en el seguimiento de su propio proceso de aprendizaje. Convertirse en estudiante requiere de momentos específicos, y con cierta sistematicidad, en los que cada uno pueda identificar qué sabía, qué aprendió, sobre qué puede profundizar o qué tiene que revisar, pudiendo poner en palabras lo que no entiende para pedir ayuda.

Revisar juntos lo que hicimos en la semana para “ordenar la carpeta”, hacer una afiche en grupos o entre todos con afirmaciones acerca de lo aprendido, preparar una síntesis o un “machete” con lo más importante que hay que recordar, comparar las conclusiones escritas en clase con lo que dice en uno o más libros sobre ese tema, preparar preguntas que podrían responderse con lo nuevo aprendido en una semana, son ejemplos de actividades posibles para contribuir a este proceso.

### **¿Qué debieran hacer los alumnos en la clase de resolución de problemas?**

En este documento han sido planteadas algunas ideas respecto de la enseñanza, que forman parte fundamental del marco teórico que este Programa toma como base para desarrollar las propuestas que realiza a los docentes. Desde esta concepción de la enseñanza, que intenta favorecer la diversidad y provocar evoluciones en el conocimiento, resulta fundamental para los niños y las niñas que puedan:

- Involucrarse en la resolución de problemas confiando en sus propias posibilidades de hallar una respuesta,
- Elaborar estrategias propias y compararlas con las de sus compañeros considerando que los procedimientos incorrectos o las exploraciones que no los llevan al resultado esperado son instancias naturales en todo aprendizaje.
- Comunicar a sus compañeros y compañeras y al maestro lo realizado en forma oral y escrita, cada vez con mayor precisión
- Reflexionar para determinar qué procedimientos son los más convenientes para la situación que se estudia.
- Discutir sobre la validez de los procedimientos realizados y de los resultados obtenidos y formularse nuevas preguntas acerca del alcance de esos resultados
- Establecer relaciones y elaborar formas de representación, discutir las con los demás, confrontar las interpretaciones sobre ellas y acerca de la notación convencional.
- Elaborar conjeturas, formularlas, comprobarlas mediante el uso de ejemplos o justificarlas utilizando contraejemplos o propiedades conocidas
- Reconocer los nuevos conocimientos y relacionarlos con los ya sabidos.
- Interpretar información presentada de distintos modos, y pasar de una forma de representación a otra según su adecuación a la situación que se quiere resolver.
- Producir textos con información matemática avanzado en el uso del vocabulario adecuado.

### **La evaluación para la toma de decisiones**

Una parte central del proceso de enseñanza es la toma de información sobre sus efectos en los aprendizajes de los alumnos. En el enfoque que desarrollamos, las actividades que permiten evaluar son también problemas que permiten tomar permanentemente información sobre qué saben los chicos sobre lo que se ha enseñado o se desea enseñar.

En este sentido, cuando nos proponemos enseñar un nuevo contenido, es importante considerar una evaluación para tener algunos indicios de los conocimientos del grupo y considerarlos en un sentido diagnóstico, es decir, para conocer los saberes previos de los alumnos en relación con los temas a enseñar pues funcionarán como punto de partida para las actividades que planifiquemos. De este modo, la evaluación diagnóstica, en lugar de focalizarse en el inicio del año, se vincula con la planificación de cada unidad.

Durante el desarrollo de las actividades estaremos atentos a los procedimientos y reflexiones que los niños van produciendo para ir detectando tanto los aciertos como las dificultades de los alumnos en una evaluación del proceso de aprendizaje, y vamos proponiendo actividades extra para aquellos que lo necesitan.

Finalmente, al concluir el conjunto de actividades planificadas, realizamos una evaluación final con nuevos problemas similares a los trabajados para tener un registro de los avances que cada niño ha logrado.

En todos los casos, el sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el estado de los saberes de los alumnos, para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Al considerar las producciones de los alumnos, pueden aparecer errores de diferente origen, pero muchas veces los que llamamos “errores” no son tales. Algunos de ellos están vinculados con una distracción circunstancial como copiar mal un número del pizarrón que sólo habrá que aclarar. Otros, en cambio, estarán mostrando una forma de pensar provisoria, por ejemplo, cuando los chicos dicen “al multiplicar siempre se obtiene un número mayor que cada factor”. Esto, que es cierto mientras se trabaje con números naturales, deberá ser cuestionado al considerar el campo de los números racionales. Si para sumar  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  un alumno suma  $1+1$  y  $2+3$  está operando con números naturales sin advertir que  $\frac{1}{2}$  representa un número, el cociente entre 1 y 2, y no dos.

Frente a los “errores” descubiertos será necesario: analizarlos, intentar comprender cómo y por qué se producen y plantear actividades de distinto tipo. En el caso de cuestiones presentes en las producciones de muchos alumnos del grupo, habrá que volver sobre la noción involucrada en ese momento, cuestionándolos con ejemplos que contradigan sus ideas. No es evitando los “errores” que se acorta el proceso de aprendizaje, sino tomándolos que se enriquece. Los errores son parte del proceso de aprendizaje y, como tales, debatir sobre ellos es una estrategia que contribuye a superarlos.

## La enseñanza de las operaciones con números naturales en el segundo ciclo

Ya en el primer ciclo los alumnos han comenzado a construir los primeros significados para las operaciones usándolas para resolver distintos problemas y, a la vez, han resuelto problemas en los que no se trabaja con cantidades para comprender distintos procedimientos para calcular relacionando las propiedades de los números y de las operaciones.

Desde hace unos años, sabemos que los problemas aritméticos que se resuelven con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, tienen diferentes niveles de dificultad no solamente por la técnica operatoria sino también por la naturaleza de los datos y por la estructura matemática del problema.

De este modo, con una misma operación, es posible resolver un cierto conjunto de problemas de diferente dificultad. Por ejemplo, podemos enunciar problemas distintos que se resuelvan multiplicando  $4 + 5$ :

- *Me regalaron 5 caramelos y yo tenía 4 caramelos guardados, ¿cuántos tengo ahora?*
- *Alejandro llevó a la escuela 4 caramelos y 5 bombones. ¿Cuántas golosinas llevó?*
- *Estaba en el casillero 4 de un juego de la Oca y saqué 5 al tirar el dado ¿A qué casillero debo mover mi ficha?*

En el primer caso las cantidades son del mismo tipo (caramelos) y se trata de “agregar” una cantidad a otra. En el segundo, son cantidades de dos clases distintas (caramelos y bombones) y se trata de reunir esas cantidades en una sola clase (golosinas). En el tercer caso, los números ordenan (los casilleros) y se trata de avanzar desde en la serie. Así para la suma podemos encontrar problemas en los que se trata de agregar, de reunir o de avanzar.

De modo similar, la resta no tiene el mismo significado cuando se usa para calcular cuánto quedó después de quitar una cantidad que cuando se usa para encontrar un complemento. Por ejemplo, los siguientes problemas pueden resolverse calculando  $9 - 4$  pero las situaciones son distintas:

- *Si teníamos 9 caramelos y comimos 4, ¿cuántos quedaron?*
- *Tengo 9 caramelos, 4 son de naranja y los otros de limón. ¿Cuántos son los caramelos de limón?*

*Paraguay*

En el segundo ciclo se incluyen otros significados, como por ejemplo: la composición de dos transformaciones de la cantidad de elementos de una colección:

- *Andrés pierde 123 puntos en la primera ronda de un juego de mesa y gana 64 puntos en la segunda ronda. ¿Cómo terminó su puntaje en el juego?*
- *Analía pierde en la primera ronda 123 puntos, y dice que entre esa ronda y la segunda perdió en total 70 puntos. ¿Qué le pasó en la segunda ronda?*

En el primer problema, hay que averiguar el resultado de la composición de dos transformaciones, una es negativa (pierde 123) y la otra es positiva (gana 64). Para componer las dos, es posible pensar en  $123 - 64$ .

En el segundo problema, se da el resultado de componer dos transformaciones (perdió en total 70 puntos) y una de las transformaciones (perdió 123 en la primera ronda), y hay que averiguar cuál es la otra (qué pasó en la segunda ronda). Si lo que perdió en total es menos de lo que perdió en la primera ronda, es porque en la segunda tuvo que ganar y, para saber cuántos puntos obtuvo, pensamos en  $123 - 70$ .

Cuaderno NAP 4 pp 77

El avance también se da al incluir números más grandes y para ello habrá que buscar problemas donde tenga sentido el uso de ese tipo de números, por ejemplo datos astronómicos, pero siempre teniendo en cuenta que se trate de situaciones verosímiles. Asimismo habrá que incluir problemas que combinen distintas operaciones, o con varias preguntas, para que los alumnos vayan trabajando con situaciones cada vez más complejas, que exijan leer información en distintos portadores como textos informativos, gráficos de distinto tipo y tablas.

El cálculo de sumas y restas, que es el tema más “conocido” para los alumnos permitirá avanzar más allá de la resolución incluyendo la explicitación de las propiedades que fundamentan los

distintos procedimientos de cálculo, de este modo también podrán avanzar en sus posibilidades de argumentar con un lenguaje más ajustado.

En el caso del campo multiplicativo es clave advertir que los problemas que usualmente identificamos como “de multiplicar” o “de dividir” son en realidad casos de proporcionalidad simple donde se conoce, o se busca, el valor de la unidad.

*Si 1 cuaderno cuesta \$8, ¿cuánto cuestan 20 cuadernos?*

*Si por 12 cuadernos se pagaron \$72, ¿cuánto costó cada cuaderno?*

Articular los conocimientos de los niños sobre la multiplicación y la división con el análisis de las relaciones entre cantidades proporcionales, será un desafío para el ciclo que abordaremos en otro apartado.

El avance en los problemas de división que remiten a reparto y partición estará dado por la flexibilización de su uso y por el estudio de la relación entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto. En relación con el uso de la división, muchas veces, no haber resuelto y analizado suficientes problemas donde la división remite a una partición, deriva en obstáculos de cálculo ya que los alumnos no se han acostumbrado a estimar el cociente como “cuántas veces entra” una cantidad en otra.

Además de su impacto en el cálculo este significado está íntimamente ligado al proceso de medir y la idea de razón, por lo que conviene prestarle particular atención.

En relación con los procedimientos de cálculo se busca, en principio, ampliar los repertorios aditivo y multiplicativo ya conocidos para flexibilizar su uso. Aquí será central la recuperación de las estrategias de cálculo mental para ir, progresivamente, disponiendo de distintas formas para calcular, no sólo en forma exacta sino también aproximada. También se espera que los alumnos y alumnas decidan de manera autónoma qué procedimientos utilizar en función de la situación o el tipo de números involucrados. En este proceso se requiere ir explicitando las descomposiciones de los números y las propiedades de las operaciones utilizadas, argumentando acerca de las transformaciones que se pueden hacer, y las que no.

Durante este ciclo el análisis y uso de distintos procedimientos producidos por los alumnos debe promover el avance hacia formas cada vez más eficaces sin tener necesariamente como meta la utilización de un único algoritmo por parte de todos los alumnos y alumnas de la clase. Sí es fundamental que, cada uno, pueda resolver teniendo control de lo que hace y avance progresivamente hacia procedimientos cada vez más sintéticos.

En el caso de la multiplicación, y así se indica en los NAP, es posible avanzar desde la producción y análisis de procedimientos basados en las propiedades al algoritmo tradicional, reorganizando escrituras.

En el caso de la división, muchas veces se sostiene una etapa en la que se aceptan procedimientos basados en restas sucesivas, aproximaciones por productos o descomposición del dividendo para enseñar luego el algoritmo tradicional, sin que el alumno pueda relacionar esos procedimientos. Además de superar la dificultad que supone ir trabajando cifra a cifra, el algoritmo tradicional involucra la resta por complemento que usualmente es desconocida por los niños.

$\begin{array}{r} 12009 \\ - 11200 \\ \hline 00809 \\ - 560 \\ \hline 249 \\ - 224 \\ \hline 25 \end{array}$	$\begin{array}{r} 28 \\ 400 \\ 20 \\ 8 \\ \hline 428 \end{array}$	<p><i>Cuatro por ocho treinta y dos, cuatro por dos ocho y tres once. Once mil doscientos.</i></p> <p><i>Nueve menos cero nueve, cero menos cero cero, diez menos dos ocho, uno menos uno cero.</i></p> <p><i>Dos por ocho dieciséis, dos por dos cuatro y uno más cinco, quinientos sesenta.</i></p> <p><i>Nueve menos cero nueve, diez menos seis cuatro, siete menos cinco dos...</i></p>
$\begin{array}{r} 12009 \\ 80 \\ 249 \\ 25 \end{array}$	$\begin{array}{r} 28 \\ 428 \end{array}$	<p><i>Cuatro por ocho treinta y dos, al cuarenta ocho, cuatro por dos ocho, y cuatro doce.</i></p> <p><i>Dos por ocho dieciséis, al veinte cuatro, dos por dos cuatro y dos seis, al ocho dos. ...</i></p>

Dado que en este caso, no se trata de pasar a hacer mentalmente lo que antes se venía haciendo por escrito, sino que se trata de “hacer otra cosa” resulta poco productivo insistir en que los alumnos pasen de un método a otro, a menos que previamente se aborde la enseñanza de la resta por complemento y se flexibilice su uso.

Cuando se busca que los alumnos tengan control de sus procedimientos pudiendo determinar su pertinencia y economía en función de los números involucrados, es necesario promover la utilización de distintos procedimientos, incluyendo necesariamente el uso reflexivo de la calculadora y no el algoritmo tradicional.

Es más, el uso extendido de las calculadoras hace que nos preguntemos si por ejemplo el algoritmo tradicional para la división no tendría que haber tenido el mismo destino que el usado para calcular raíces cuadradas con lápiz y papel, que se enseñaban en la escuela cuando la tecnología no estaba disponible.

Es necesario que todos puedan utilizar la calculadora de manera reflexiva, esto es anticipando el orden de magnitud del resultado que se espera y pudiendo evaluar su razonabilidad y que avancen en el conocimiento de sus funciones, incluyendo por ejemplo el cálculo de porcentajes o la realización de cálculos combinados. El uso de la calculadora es también un recurso potente para generar problemas en contexto intramatemático que pongan en juego la explicitación de las propiedades de las operaciones.

### **Acerca del alcance de los contenidos en cada grado**

En cuarto grado, es importante recuperar lo trabajado en el primer ciclo flexibilizando su uso antes de avanzar. El dominio de las descomposiciones aditivas de los números, del repertorio multiplicativo y de las propiedades de las operaciones es clave para resolver cálculos más complejos. Es más, sin estos conocimientos no hay posibilidad de producir diferentes procedimientos de cálculo.

Aclaremos aquí que dominar del repertorio multiplicativo no equivale a “saber las tablas de memoria”. Se trata de que, dados dos factores, el alumno pueda disponer rápidamente y con seguridad del resultado correcto ya sea porque conoce el resultado de memoria o porque puede relacionarlo con otro resultado que sí conoce. Si un niño trata de recuperar un resultado, por ejemplo  $6 \times 8$ , revisando mentalmente toda la tabla, aunque la sepa, nos muestra que sabe “menos” que otro que puede pensar que el resultado  $6 \times 8$  es el doble, del doble, del doble de 6 ( $6 \times 8 = 6 \times 2 \times 2 \times 2$ ) o que otro que sabe que  $3 \times 8 = 24$  y duplica ese resultado. Por esta razón será fundamental el trabajo que se haga sobre la tabla pitagórica buscando enriquecer la red de relaciones entre productos. Si, por ejemplo, los alumnos utilizan con comodidad la propiedad distributiva para apoyarse en las tablas de 2 y del 5, conocidas por todos, para disponer de los productos por 7 ( $9 \times 7 = 9 \times 2 + 9 \times 5$ ) no solo resuelven rápidamente sino que podrán recurrir espontáneamente a la descomposición aditiva y al uso de la propiedad cuando tengan que multiplicar números más grandes.

También habrá que fortalecer las multiplicaciones y divisiones por números terminados en ceros. Cuando se ha trabajado suficientemente con el repertorio de productos y el uso de la propiedad distributiva, la articulación de los procedimientos que usan los chicos - que en realidad no son más que distintas formas de descomponer y aplicar la propiedad- con el algoritmo usual es muy natural. Solo se trata de ordenar la escritura de los números en la cuenta de un modo más “económico”. Por otra parte, habrá que tener en cuenta que desde la perspectiva del desarrollo de competencias poder “usar el algoritmo” no es garantía del avance en el dominio de distintas estrategias de cálculo ya que, por ejemplo, para calcular  $300 \times 2000$  los niños no debieran recurrir de manera mecánica al algoritmo sino resolver mentalmente.

El avance en el cálculo de divisiones “largas” se hará entre 4to y 5to, teniendo en cuenta tal como se planteó antes, que el algoritmo tradicional no resulta el procedimiento más claro cuando se trata de promover la comprensión y el control de lo que se hace.

En 5to se profundiza el análisis de distintos procedimientos de cálculo con los algoritmos usuales de suma, resta, y multiplicación por una y dos cifras, y el de división por

una y dos cifras por aproximaciones sucesivas, dando lugar a la explicitación de las propiedades de las operaciones que permiten justificar cada paso y cuáles son más económicos.

Alternar el cálculo con lápiz y papel con el uso de la calculadora permite que “hacer las cuentas” no se convierta en una tarea monótona. Es más, si se busca dominio de estrategias de cálculo, es más productivo presentar 3 cuentas con números que pueden relacionarse y plantear alguna pregunta sobre esas relaciones que dar 5 cuentas para “practicar”. Por ejemplo:

$$\text{Resolver: } 6000 : 50 = \quad 3600 : 50 = \quad 9600 : 50 =$$

¿Entre qué valores está el resultado de  $8540 : 50$ ? ¿Y el de  $6000 : 46$ ?

¿Cómo te diste cuenta? Comprobá tus estimaciones usando la calculadora.

Resolvé  $7640 : 48$  con lápiz y papel.

También se busca que los niños puedan explorar qué “se puede” y qué “no se puede” dando lugar al uso de contraejemplos para argumentar. Por ejemplo: *no se puede conmutar en dividendo con el divisor porque no es lo mismo  $40 : 8$  que  $8 : 40$ .*

Esto permitirá explorar nuevas relaciones entre números, por ejemplo entre múltiplos y divisores, sistematizar otras conocidas y a la vez plantear preguntas que se retomarán al trabajar con racionales.

Es interesante también vincular la multiplicación y la división descubriendo, por ejemplo, que descomponer en factores ayuda a obtener rápidamente el resultado de distintas divisiones. Por ejemplo:

$$3600 = 36 \times 100 = 36 \times 50 \times 2 = 36 \times 4 \times 25 = \dots \text{ entonces } 3600 : 50 = 36 \times 2 = 72$$

Asimismo se inicia el trabajo sobre las relaciones entre dividendo, divisor cociente y resto que se profundiza en 6to grado.

En los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios se plantea que al finalizar el segundo ciclo los alumnos y alumnas tendrían que poder:

- Operar seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados<sup>2</sup> que resulten más convenientes en función de la situación y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo usando propiedades de las operaciones en distintos campos numéricos.
- Producir y analizar afirmaciones sobre relaciones numéricas vinculadas a la divisibilidad y argumentar sobre su validez.

Por lo tanto, no se trata en 6to grado de generar muchos aprendizajes nuevos, salvo los referidos a divisibilidad, sino de articular lo que se exploró en 4to y 5to grado y utilizarlo de manera autónoma frente a distintas situaciones. A su vez se distinguirán las diferencias entre división entera y exacta al abordar el trabajo con decimales y fracciones.

Operar con fracciones requerirá que los alumnos comprendan la reversibilidad de las relaciones de múltiplo y divisor vinculándolas con las relaciones doble-mitad, triple-tercio.

### **Propuestas de actividades**

A continuación se presentan algunas alternativas para trabajar con algunos de estos contenidos en el ciclo.

En la primera parte se desarrollará una secuencia para 4º grado centrada en la división. La primera parte aborda el uso de esta operación para resolver problemas con distintos significados y, en la segunda, se plantea el análisis de distintas formas de hacer la cuenta de dividir.

Luego se proponen actividades para realizar adecuaciones en función de distintos propósitos.

Cabe aclarar que las actividades del apartado sobre enseñanza de la proporcionalidad incluyen, necesariamente, operaciones con números naturales y su tratamiento en clase podría articularse con las planteadas en este apartado. Asimismo, el trabajo sobre racionales requerirá recuperar los conocimientos de los alumnos sobre división.

Otras propuestas de actividades, con sus correspondientes análisis didácticos, acordes a los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios, pueden encontrarse en:

- Cuadernos para el Aula Matemática 4, 5 y 6, Ministerio de Educación Ciencia y tecnología. 2007. Disponibles en:  
<http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/>
- Juegos en Matemática. EGB2. El juego como recurso para aprender. Ministerio de Educación Ciencia y tecnología. 2002. Disponible en:  
[http://www.me.gov.ar/curriform/pub\\_jem.html](http://www.me.gov.ar/curriform/pub_jem.html)
- División en 5° y 6° año de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Dirección General de Cultura y Educación. 2007 En  
<http://abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm>
- Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento Educativo. Dirección de Currícula y Enseñanza. 2006  
[http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri\\_mate.php?menu\\_id=20709](http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709)

Para profundizar acerca de la enseñanza de la división se puede consultar:

- *La enseñanza de la división en los tres ciclos.* Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Dirección General de Cultura y Educación.  
<http://abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm>
- *La división por dos cifras: un mito escolar* Desarrollo curricular N° 5.  
En: <http://www2.educacion.rionegro.gov.ar/v2005/gcurri/matematica/matemat.htm>

### **Secuencia para usar la división en distintas situaciones y comparar distintas formas de calcular**

Si bien la secuencia está prevista para ser desarrollada en 4° grado, también podría ser útil en el inicio de 5° grado como revisión -realizándola en menos tiempo y con mayor nivel de justificación en las respuestas- o complejizándola como se planteará más adelante.

Para el trabajo con la secuencia se sugiere dividir la/s actividades en etapas que se desarrollan en varias clases y, en cada clase, pueden realizarse una o más actividades, dependiendo del ritmo de trabajo de los alumnos. En cualquier caso habrá que asegurarse de hacer un cierre recuperando el estado de avance del trabajo al finalizar cada clase, y cada etapa. Esta explicitación es central para poder dar continuidad al proceso de estudio.

En este caso también es posible dividir la secuencia en la etapa A, centrada en los significados de la división, y la etapa B, centrada en los procedimientos de cálculo.

Asimismo se buscará dar lugar a los momentos planteados para la gestión de la clase en la introducción general, aunque éstos podrían darse en más de una clase.

Lo importante aquí es dar lugar a que los alumnos tomen decisiones en relación a su producción personal, puedan comunicar sus procedimientos y resultados, se puedan comparar las diferentes producciones realizadas para determinar si son correctas o no, o si pueden mejorarse dando los argumentos necesarios y que el docente ayude a los alumnos a formular las conclusiones a las

que arribe el grupo de la clase en un registro escrito que se convierte en la memoria de lo actuado. La lectura y revisión de este registro, en el que también deben quedar las preguntas que surgen y que quedan pendientes de respuesta, permite no solo dar continuidad al trabajo sino volver sobre esa enunciación para modificarla ampliándola o ajustando el vocabulario utilizado.

También es importante, cada vez que sea posible y sin forzar la situación, generar preguntas que permitan explorar cómo variaría la respuesta a una pregunta si cambia uno de los datos usados para hallarla, para promover el proceso de generalización de la noción en estudio.

Etapa	Actividades	Observaciones
A. 1	1	Esta actividad permite hacer un primer diagnóstico acerca de los conocimientos de los alumnos sobre la división. Si se encuentra dificultad se puede explorar qué ocurre tomando como valor inicial 48 o 36 en lugar de 72. Si no, se avanza a la actividad 2 y se enriquece el trabajo en la puesta en común discutiendo cómo se modifican las respuestas variando la cantidad inicial de alfajores. En función de lo detectado habrá que preparar, eventualmente, actividades para fortalecer repertorio de multiplicaciones por una cifra y por números terminados en ceros y así como divisiones del tipo $200 : 10$ .
2	2 y 3	Con estas actividades, y la recuperación de la 1, se busca poner en evidencia la diferencia entre reparto y partición. Por ejemplo, para $72 : 8$ en el problema 1.a) se conoce la cantidad de partes (8 bolsitas) y se necesita averiguar el valor de cada parte (cuántos alfajores en cada bolsita). En d), en cambio, se conoce el valor de cada parte (cuántos alfajores en cada bolsita) y se necesita averiguar cuántas se pueden llenar. También se espera que en la puesta en común se discuta la diferencia entre repartos equitativos y no equitativos y se recuperen las ideas de múltiplo y divisor.
3	4	Esta nueva situación permite identificar estos dos significados en otro contexto ya que se usa la división para averiguar: el precio de un pasaje conociendo el total (reparto) y la cantidad de pasajes que se pueden comprar conociendo el valor unitario (partición). A la vez se utilizan números terminados en cero que permiten aplicar descomposiciones y propiedades generando distintos procedimientos para resolver ya que no se espera que los alumnos utilicen el algoritmo. Si algunos lo conocen, y lo usan, este se toma como una variante más que se analiza en la puesta en común, anticipando la parte B.
4	5	Esta actividad podría resolverse de forma individual o de a dos, permite evaluar el avance de los aprendizajes de los niños. Luego se leen distintos ejemplos para, finalmente, expresar la diferencia entre repartir y partir en un texto-conclusión elaborado por el conjunto de la clase. También se pueden intercambiar los enunciados entre las parejas para resolverlos. En función de lo detectado, se podrían plantear problemas similares al 1, o al 4, para afianzar el cálculo mental antes de pasar a la etapa siguiente.

B. 1	1 y 2	En esta etapa la atención se focaliza en las “formas de hacer la cuenta” y se podría iniciar recuperando los procedimientos que los niños usaron para resolver el problema A.4. En la puesta en común del problema 1 interesa destacar que, aunque no se escriba la resta, el resto (4) es la diferencia entre el dividendo (60), y el producto del cociente (8) por el divisor (7). Resolver “como Bianca” pone nuevamente en evidencia esta relación que podría no haber sido advertida por los niños si resolvieran mecánicamente.
2	3	Antes de proponer divisiones con números más grandes es necesario comprobar si los alumnos usan con comodidad multiplicaciones por números terminados en ceros. Por ejemplo <i>862 : 8 tiene que dar más de 100 porque <math>8 \times 100</math> es 800</i> . Si esto no ocurre es necesario trabajar sobre

		cálculo mental antes de avanzar.
3	4	Este análisis puede llevar más de una clase pero es central para comprender la estrategia de aproximaciones sucesivas y no debe “apurarse”. Tal vez una primera discusión en pequeños grupos ayuda a enriquecer los intercambios. Si bien se espera que los alumnos puedan resolver en menos pasos que Bianca, no sería importante si algunos necesitan hacerlo al resolver las primeras cuentas.
4	5, 6 y 7	Estas actividades buscar dar elementos a los niños para que puedan estimar mejor el cociente e ir resolviendo, progresivamente, en menos pasos. Es frecuente que las “escrituras auxiliares” como las tablas de dobles vayan desapareciendo a medida que se dispone de más resultados memorizados y se ha flexibilizado la estimación, sin embargo esta no es una meta para el conjunto de la clase y no debe impactar en la acreditación. Independizarse de esas escrituras no es imprescindible y a algunos niños podría llevarles un tiempo mucho mayor del que se dedica a esta secuencia. Dado que cada uno encuentra un procedimiento más fácil o más difícil en función de lo que sabe, se presenta la actividad 7 como otra alternativa para estimar, pues no se trata de instalar el uso de la tabla de dobles como un procedimiento único para toda la clase.
5	Adaptación de A.4	Como evaluación puede presentarse un problema similar al 4 de la primera parte: usando el mismo contexto con otros valores o en un contexto nuevo, por ejemplo de compras de un artículo en cuotas. Se trata de dar a los alumnos la oportunidad de decidir cómo resolver y luego, en función de los resultados que se obtengan, decidir qué tipo de ejercitación elegir. Cabe destacar que no se espera que luego de estas pocas actividades la mayoría de los alumnos utilicen un procedimiento muy económico, pero sí que puedan utilizar alguno teniendo control sobre lo que hacen. Tampoco se trata de continuar insistiendo con la división, habrá que continuar con una secuencia con otro foco y luego volver con problemas que requieran multiplicar y dividir.

#### Actividades que pueden usarse para adecuar la secuencia en función de distintas necesidades

- Si los niños tienen dificultades con los productos de una cifra puede realizarse, antes de iniciar la secuencia, una etapa previa de revisión sobre multiplicación. Por ejemplos se pueden explorar las relaciones numérica en las tablas de multiplicar a partir del juego siguiente:

Juego del gato: se juega en parejas y cada pareja tiene un tablero, dos clips de papel o palitos para usar como “señaladores”, un puñado de semillas (o fichas o bollitos de papel de distinto color) para cada jugador y una tira de números del 1 al 12 como los siguientes:

Cuadro de productos:

11	12	14	15	16	18	20
21	22	24	25	27	28	30
32	33	35	36	40	42	44
45	48	49	50	54	55	56
60	63	64	66	70	72	77
80	81	84	88	90	96	99
100	108	110	120	121	132	144

Fila de factores:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Fuente: Matemática 4. Cuadernos para el Aula. Página 105.

Un jugador escoge 2 números de la fila de factores, los marca con los señaladores y multiplica estos números, colocando una semilla o ficha de su color en la casilla que contiene el producto. Por ejemplo, señala 5 y 6, y pone la ficha en el 30. Luego, el otro jugador mueve solo uno de los señaladores a otro número en la fila de factores. Este jugador multiplica los números marcados y coloca una ficha de su color en la casilla del producto.

Los jugadores siguen alternando turnos y gana el jugador que cubre 4 casillas en línea, vertical u horizontal, sin espacios vacíos en medio.

El juego no solo favorece la memorización de los productos sino que lleva a relacionar multiplicación y división para anticipar los movimientos del adversario e intentar “trabarlo”, lo que también lleva a buscar diferentes productos que den un mismo número. Luego se puede discutir con los alumnos qué número conviene marcar: si el número tiene muchos divisores es más fácil marcarlo. También se pueden sistematizar definiciones de múltiplo y divisor.

- Si la secuencia se usa en 5to grado con el propósito de retomar los procedimientos por aproximaciones sucesivas y mejorarlos, se puede organizar, por ejemplo:

Actividad 1: Actividad 4 de la parte A .

Actividad 2: Actividad 4 de la parte B manteniendo el contexto de los pasajes y adaptando los procedimientos a la solución de: Una maestra fue a sacar los pasajes para llevar a sus alumnos de excursión. Cada pasaje costaba \$25 y gastó \$ 900. ¿Cuántos pasajes compró?  
Actividades 3, 4 y 5: Adaptaciones de las actividades 5, 6 y 7 con números más grandes.

- Si se necesita fortalecer la estimación se pueden agregar actividades como las siguientes adaptando los números según se trabaje en 4to, 5to o 6to grado

1. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

$$525 \times 22 = \quad 10000 \quad 11000 \quad 11550 \quad 12100$$

$$360 \times 19 = \quad 68400 \quad 6840 \quad 684$$

2. Encuadrá el resultado de cada cuenta. ¿Cómo lo pensaste?

$$50 \times 22 \text{ entre } 100 \text{ y } 1000 \quad \text{entre } 1000 \text{ y } 10000 \quad \text{entre } 1000 \text{ y } 1100$$

$$49 \times 510 \text{ entre } 1000 \text{ y } 2000 \quad \text{entre } 20000 \text{ y } 30000 \quad \text{entre } 30000 \text{ y } 40000$$

3. Colocá un número, para que el producto resulte entre los números indicados.

190 x ... está entre 3500 y 4000

310 x ... está entre 35000 y 40000

4. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

8400 : 40 =            210    2100    21

1305 : 45 =            290    29    40

Luego de realizar cada actividad interesa intercambiar las distintas justificaciones y registrar las estrategias que resulten útiles, por ejemplo, hacer el doble y luego agregar un cero (multiplicar por 20) para estimar el resultado de una multiplicación por 19.

- Para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones en 6to grado pueden realizarse actividades como las que siguen, centradas en el trabajo sobre la argumentación, para después realizar un afiche donde se registren las reglas que han sido validadas y otras que se puedan recuperar incluyendo la explicitación de las propiedades de las operaciones. Ya en 6to grado es importante, por ejemplo, analizar los límites de la propiedad distributiva para el caso de la división ya que es posible descomponer el dividendo en una suma o una resta , pero no el divisor.

1. a) ¿Con cuáles de las siguientes afirmaciones estás de acuerdo? ¿Por qué?

80 x 90 es el doble de 40 x 90

80 x 90 es el doble de 4 x 9 x 100

80 x 90 es 50 x 90 más 30 x 90

80 x 90 es el doble del doble del doble de 90.

80 x 90 es el triple del triple de 800

80 x 90 es 80 x 100 menos 10

b) Escribí como una “regla” de cálculo mental las afirmaciones que resultaron correctas.

2. a) Pablo dice que para multiplicar un número por 5, se le agrega un cero y al resultado se lo divide por dos. Ester dice que mejor es hacer la mitad y multiplicar por 10.

¿estás de acuerdo con lo que dicen?¿Por qué?

b) Para multiplicar un número por 5, ¿vale alguna de estas reglas?¿por qué?

Doblar y añadir el doble,

añadir el doble del doble,

añadir el doble y doblar.

3. Pablo dice que para multiplicar un número por 99, se añaden dos ceros y se le resta el número. Ester dice que se le agregan dos ceros pero se resta uno porque 99 es uno menos que cien. ¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

4. Analizá estas reglas para dividir por 25 y decidí si son correctas o no:

- a) dividir el número por 20 , dividir el número por 5 y sumar esos resultados
- b) multiplicar el número por 4 y dividir el resultado por 100
- c) dividir el número por 5, y dividir el resultado de esa cuenta por 5

5. Pablo dice que para resolver  $36 \times 150$ , hace  $30 \times 150$  y  $6 \times 150$  y suma los resultados. Ester dice que ella hace  $36 \times 100$  y  $36 \times 50$ , y después suma los resultados. ¿Está bien lo que hace Pablo o lo que hace Ester?, ¿por qué?

## La enseñanza de los números racionales en el segundo ciclo

Tal como lo hemos planteado en el enfoque de trabajo, para planificar la enseñanza de un conocimiento matemático particular es necesario comenzar por preguntarnos cuáles son las situaciones en las que este conocimiento resulta útil para las personas.

¿Qué problemas requieren del uso de estos números? ¿Qué los diferencia de los problemas que los alumnos ya saben resolver usando números naturales?

Luego tendremos que precisar cuál es el alcance del contenido y qué tipo de trabajo organizar para que el aprendizaje contribuya al desarrollo de competencias.

En principio entonces, para que los niños y niñas puedan advertir los distintos usos de los números racionales será necesario proponer distintas situaciones en las que tengan que **medir, comparar y operar con medidas** u obtener **resultados de divisiones exactas**.

En los NAP se propone que los alumnos puedan interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades (precios, longitudes, pesos, capacidades, áreas) usando fracciones y/o expresiones decimales usuales, ampliando progresivamente el repertorio conocido para establecer nuevas relaciones.

Luego de usar estos números para resolver distintos problemas habrá que proponer otros problemas “intramatemáticos” con el propósito de establecer relaciones entre fracciones y el entero, entre decimales y el entero; entre fracciones y decimales entre sí, etc., ya que la consideración de estas relaciones y de las distintas escrituras posibles es fundamental para comprender este nuevo campo numérico.

Este trabajo apunta a que los alumnos descubran que se trata de “nuevos números”, distintos de los conocidos, que hay que explorar para conocer y caracterizar.

El trabajo con números racionales supone una ampliación de los conocimientos numéricos pero a la vez una ruptura con lo que los niños saben sobre los números naturales. De este modo, los números naturales son, al mismo tiempo, el punto de partida y el obstáculo, para el estudio de los números racionales. Muchos de los conocimientos que los alumnos poseen, producto de su trabajo con números naturales, deberán ser adaptados durante el trabajo con números racionales. Por ejemplo, y entre otros:

- los números racionales no tienen siguiente: entre 2,5 y 2,7 no solo se encuentra el 2,6 sino que hay infinitos números racionales.

- al trabajar con escritura decimal, la cantidad de cifras no sirve para establecer si un número es mayor o menor que otro: aunque 2,3456 tiene más cifras que 23, es menor.

- el resultado de una multiplicación no es siempre mayor que sus factores:

$2,5 \times 3,6 = 9$  y 9 es mayor que 2,5 y que 3,6

$0,25 \times 0,36 = 0,09$  que es menor que 0,25 y que 0,36

- la idea de “suma abreviada” sobre la que muchos alumnos han construido la multiplicación se puede asociar al caso de multiplicar un número natural por un racional pero no para dos racionales, lo que llevará a incorporar nuevos significados para esta operación. El significado que se mantiene para la multiplicación, y se enriquece, es el de las relaciones de proporcionalidad y el nuevo es el de cálculo de áreas.

Coincidimos con Irma Saiz cuando afirma “Desde la perspectiva que asocia el aprendizaje con la construcción del sentido de los conocimientos, para las operaciones con estos “nuevos” números, interesa ocuparse de:

- los problemas que se resuelven o que se relacionan con ellas,

- las situaciones en las que no pueden ser utilizadas,

- la evolución de las distintas concepciones de la operación que permita utilizarla en los distintos campos numéricos,

- sus relaciones con otros conceptos (multiplicación y división con proporcionalidad, por ejemplo),
- sus relaciones con otras operaciones,
- los recursos de cálculo que pueden ser utilizados, en donde el algoritmo es uno entre otros posibles,
- por qué funcionan tales recursos de cálculo,
- cuáles son los mecanismos de control que se poseen y que permiten validar el procedimiento realizado o la adecuación de la respuesta, etc.”

Saiz, I. (1999), *Hacer matemática 2*, Libro para el docente, Buenos Aires, Estrada.

En relación con las operaciones con expresiones fraccionarias y decimales, además de revisar y ampliar los significados conocidos, será importante abrir el trabajo en clase a una variedad de procedimientos de cálculo, fortaleciendo en particular el cálculo mental, incluyendo el uso reflexivo de la calculadora y dejando el estudio de los algoritmos como cierre del proceso, porque cuando se organiza la enseñanza priorizando los algoritmos, el cálculo puede quedar ligado a la aplicación automática de ciertas reglas que no siempre se comprenden y que no permiten evaluar la razonabilidad del resultado que se obtiene.

Para desarrollar un manejo confiado de la matemática, es importante que, frente a un problema, los alumnos sean capaces de decidir si la respuesta que se espera requiere calcular de manera exacta o aproximada para decidir luego un procedimiento adecuado a los números involucrados. Por ejemplo, se espera que al finalizar el segundo ciclo para multiplicar  $0,001 \times 8,5$  los alumnos resuelvan mentalmente sin recurrir al algoritmo o a la calculadora, que si tienen que multiplicar por  $0,25$  adviertan que es equivalente a hallar la cuarta parte, que puedan utilizar la calculadora para resolver un problema que requiere hacer una multiplicación o una división con números con más cantidad de cifras de las que admite la pantalla y que puedan resolver, con algún procedimiento con lápiz y papel,  $4580 : 356$ .

Elaborar procedimientos de cálculo para resolver un problema y estudiar esos procedimientos son actividades que, aunque relacionadas, apuntan al desarrollo de distintas competencias como buscar y producir procedimientos de solución para un problema dado, descubrir procedimientos que permiten resolver para un tipo particular de problemas, analizar los procedimientos para adquirir mayor dominio sobre ellos – lo que involucra competencias ligadas a la comunicación, el trabajo con otros y el pensamiento crítico.

Cabe señalar que el tratamiento de este eje en el ciclo está sumamente relacionado con el eje de medida. Entendemos que hacer un tratamiento simultáneo, en lugar de las alternativas sucesivas (primero decimales, después medida o viceversa) no solo resulta productivo en relación con el aprovechamiento del tiempo escolar sino que es más fértil en relaciones para el aprendizaje.

### **Acerca del alcance de los contenidos en cada grado**

En 4° grado, los primeros problemas podrán estar ligados a las mediciones o al uso del sistema monetario, y a distintas situaciones de reparto y partición.

En el caso de las expresiones fraccionarias su uso en contextos cotidianos está prácticamente limitado a  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $1 \frac{1}{2}$ ,  $1 \frac{1}{4}$  y, muchas veces, para ampliar ese repertorio se fuerzan enunciados que no resultan verosímiles y que no permiten usar el contexto como apoyo para elaborar un procedimiento o evaluar la razonabilidad de la respuesta que se obtiene. En este sentido será importante fortalecer las relaciones entre estas fracciones y el entero y entre fracciones incluyendo progresivamente octavos, tercios, sextos o décimos, pero sin avanzar con otros denominadores que no tienen un uso frecuente.

Las primeras reflexiones sobre las escrituras decimales pueden hacerse a partir de los conocimientos que tienen los niños y las niñas del uso del dinero, lo que a su vez permite establecer equivalencias en centavos para validar las respuestas a los problemas. Esta posibilidad, a la vez que da seguridad a los niños en un primer momento, puede convertirse en un obstáculo para la comprensión cabal de los decimales y debemos estar atentos. Por ejemplo, entre \$29,99 y \$30 no hay ningún precio posible - es más prácticamente no hay precios intermedios entre \$29,90 y \$30- sin embargo, entre 29,99 y 30 hay infinitos números racionales.

Algunas equivalencias de cantidades expresadas con distintas unidades familiares de longitud como metros, centímetros y milímetros permitirá ampliar el uso y comprensión de las expresiones con más de dos cifras decimales, pero el avance deberá darse en 5° y 6° grado.

Con respecto a las operaciones los alumnos comenzarán a usar la idea que tienen de las fracciones y los decimales para encontrar resultados de sumas y restas con recursos propios y tal vez de alguna multiplicación por naturales en contextos familiares. Es interesante notar que  $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$  puede parecer una cuenta “difícil” para 4° grado si se piensa desde la lógica de la progresión tradicional centrada en la transmisión de los algoritmos: primero sumas y restas con el mismo denominador y luego con distinto denominador, primero con fracciones propias, luego impropias y números mixtos. Ahora bien, cualquier niño de 4° grado puede resolver el siguiente problema sin conocer estos procedimientos:

*Laura fue a comprar 2 kg de pan. En la panadería solo había bolsitas que decían  $1\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{4}$ .  
¿Piensan que pudo comprar lo que necesitaba?*

En 5° grado se busca ampliar el repertorio con nuevos números -más allá de los familiares pero sin hacerlo de modo indiscriminado-, establecer nuevas relaciones entre fracciones, entre expresiones decimales, y avanzar en la articulación de estas escrituras.

El tratamiento de las expresiones decimales requerirá ir más allá de los décimos y centésimos, incluyendo situaciones con mediciones o cálculos de medidas con divisiones cada vez más pequeñas de la unidad, y también habrá que incluir reflexiones sobre las escrituras numéricas, sin el apoyo de las cantidades.

Nuevos problemas permitirán enriquecer la variedad de procedimientos para sumar y restar, multiplicar y dividir racionales por un número natural. Pero es importante tener en cuenta que esta variedad de procedimientos no “aparece mágicamente”. Para que los alumnos puedan resolver se requiere que antes hayan realizado equivalencias y descomposiciones del tipo  $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$  o  $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ .

Estos procedimientos luego serán analizados y comparados con consignas específicas para determinar su economía y comenzar a identificar las propiedades que los fundamentan y los alcances y límites de su utilización, cuestión que se profundizará en 6° grado.

Asimismo habrá que proponer actividades para afianzarlos y usarlos cada vez con mayor flexibilidad, manteniendo la variedad de opciones y la estimación previa del resultado, así como la posterior evaluación de su razonabilidad.

Avanzar en el conocimiento de los números racionales requiere relacionar saberes relativos a fracciones, razones, decimales en distintas situaciones de uso, articulando sus distintas representaciones.

En 6° grado, las cantidades pueden presentarse combinando números naturales y racionales con sus distintas representaciones, buscando no solo que los alumnos establezcan relaciones de orden sino que relacionen las distintas escrituras posibles para un mismo número.

Para apoyar las comparaciones y el análisis de las propiedades de los distintos números será útil apoyarse en la recta numérica, sin descuidar la complejidad involucrada en este tipo de representación pues un punto en la recta indica, a la vez, un número y la distancia al cero en la escala elegida al definir segmento 0-1. Este recurso permite también advertir que para los naturales se puede encontrar siempre el número siguiente, pero entre dos números racionales siempre es posible encontrar un nuevo número racional entre ellos.

Las actividades intramatemáticas que se planteen también permitirán discutir el uso de ejemplos y contraejemplos para argumentar sobre la validez de las afirmaciones que se hacen: si queremos convencer a otro de que algo “no es cierto” o “no vale” es suficiente con un contraejemplo, pero dar muchos ejemplos no basta para estar seguros de que lo que afirmamos se cumple “siempre”.

Esta variedad de números y de representaciones también se pondrá en juego en el trabajo con operaciones al resolver problemas que involucren cantidades discretas y continuas, centrándonos sobre todo en la multiplicación y la división ya que estas operaciones son las que plantean

rupturas en relación con los conocimientos anteriores. Retomar el análisis del valor de posición en el sistema decimal será central para extender los procedimientos de cálculo con naturales a los decimales y, para las fracciones, la base serán nuevamente las descomposiciones sumada a la explicitación de la equivalencia entre, por ejemplo, multiplicar por  $\frac{1}{2}$  y dividir por 2, que en 7° ya podría expresarse como “dividir equivale a multiplicar por el inverso”.

Dominar la correspondencia entre diferentes escrituras de un número les permitirá a los alumnos verificar resultados y comprender los algoritmos convencionales, que podrán tomarse como objeto de análisis junto a otros procedimientos producidos por los alumnos.

Recordemos que si bien es necesario un trabajo sobre las técnicas de cálculo para poder usarlas con flexibilidad, este uso debe estar acompañado por la comprensión de lo que se hace, lo que a su vez permite tener control de los resultados de este hacer.

## **Propuestas de actividades**

A continuación se presentan algunas alternativas para trabajar con estos contenidos en el ciclo. En la primera parte se desarrollará una secuencia para 5° grado centrada en la lectura, escritura, y comparación de expresiones decimales. La secuencia se inicia partiendo de contextos habituales para los alumnos, como lo son el dinero y la medición para abordar luego el análisis del valor de posición de las cifras en las escrituras numéricas y los criterios para comparar números. Luego se proponen actividades para realizar adecuaciones en función de distintos propósitos.

En la segunda parte se presentan actividades para articular expresiones decimales y fraccionarias, incluyendo propuestas para el trabajo sobre la recta numérica, que podrían realizarse en 5° o 6° grado en función de los conocimientos del grupo con el que estemos trabajando.

Cabe aclarar que las actividades del apartado sobre enseñanza de la proporcionalidad incluyen, necesariamente, operaciones con números racionales expresados tanto en su forma fraccionaria como decimal y su tratamiento en clase podría articularse con las planteadas en este apartado.

Otras propuestas de actividades, con sus correspondientes análisis didácticos, que desarrollan propuestas acordes a los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios, pueden encontrarse en

- Cuadernos para el Aula Matemática 4, 5 y 6, disponibles en:

<http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/>

- Juegos en Matemática. EGB2. El juego como recurso para aprender. Disponible en:

[http://www.me.gov.ar/curriform/pub\\_jem.html](http://www.me.gov.ar/curriform/pub_jem.html)

### **1. Secuencia para registrar, interpretar y comparar cantidades y números usando expresiones decimales**

Si bien la secuencia está prevista para ser desarrollada en 5° grado, también podría ser útil en el inicio de 6° grado como revisión -realizándola en menos tiempo y con mayor nivel de justificación en las respuestas- o complejizándola como se planteará más adelante.

Para el trabajo con la secuencia se sugiere dividir la/s actividades en etapas que se desarrollan en varias clases y, en cada clase, pueden realizarse una o más actividades, dependiendo del ritmo de trabajo de los alumnos. En cualquier caso habrá que asegurarse de hacer un cierre recuperando el estado de avance del trabajo al finalizar cada clase, y cada etapa. Esta explicitación es central para poder dar continuidad al proceso de estudio.

Asimismo se buscará dar lugar a los momentos planteados para la gestión de la clase en la introducción general, aunque éstos podrían darse en más de una clase.

Lo importante aquí es dar lugar a que los alumnos tomen decisiones en relación a su producción personal, puedan comunicar sus procedimientos y resultados, se puedan comparar las diferentes producciones realizadas para determinar si son correctas o no, o si pueden mejorarse dando los argumentos necesarios y que el docente ayude a los alumnos a formular las conclusiones a las

que arribe el grupo de la clase en un registro escrito que se convierte en la memoria de lo actuado. La lectura y revisión de este registro, en el que también deben quedar las preguntas que surgen y que quedan pendientes de respuesta, permite no solo dar continuidad al trabajo sino volver sobre esa enunciación para modificarla ampliándola o ajustando el vocabulario utilizado.

También es importante, cada vez que sea posible y sin forzar la situación, generar preguntas que permitan explorar cómo variaría la respuesta a una pregunta si cambia uno de los datos usados para hallarla, para promover el proceso de generalización de la noción en estudio.

Etapa	Actividades	Observaciones
1	1 y 2	La actividad 1 permite hacer un primer diagnóstico de los conocimientos de los alumnos. Si se encuentra demasiada dificultad convendrá realizar comparaciones con otros precios, antes de hacer la actividad 2 que permite ajustar el diagnóstico. En función de lo detectado habrá que preparar, eventualmente, actividades de refuerzo.
2	3, 4, 5 y 6	Este conjunto de actividades podría realizarse en 2, 3 o 4 clases dependiendo del interés y la posibilidad de realizar mediciones o de investigar récords en pruebas de atletismo. Se busca que los alumnos, a partir del uso de expresiones decimales para comparar medidas de longitud, identifiquen del valor posicional de las cifras en esas expresiones, lo que puede comenzar a explicitarse luego de la actividad 4 pero que seguramente será ampliado al finalizar la 6. Para dar razones los alumnos podrían apoyarse en los conocimientos sobre el dinero o en las equivalencias entre unidades del sistema métrico. Esto no significa que estas equivalencias deban “repasarse” antes, sino que, en el transcurso de las actividades habrá que prever la recuperación, y eventual ampliación, de los conocimientos de los niños sobre el metro, el centímetro y el milímetro. Aunque podría pensarse que los niños podrían trabajar con números con más decimales lo que estamos priorizando aquí es la reflexión sobre estas escrituras y no la ampliación del repertorio.
3	7 y 8	La actividad 7, que podría resolverse de forma individual o de a dos, permite evaluar el avance de los aprendizajes de los niños. En función de lo detectado, se podría adaptar la actividad 8 para que algunos grupos la realicen tal como está y otros, con otros números eligiéndolos en función de las necesidades de cada uno. También puede organizarse la clase en parejas de alumnos. Cada uno de los integrantes de la pareja escribe un número decimal en un papel y a continuación escribe una lista de pistas para descifrarlo, en otro papel. Los papeles con los números se guardan en un sobre y los papeles con las pistas son intercambiados entre los dos compañeros. Luego, cada uno escribe el número que corresponde a las pistas recibidas. Por último, se retiran los números del sobre y se confrontan las respuestas con los números anotados inicialmente. En cualquier caso se busca flexibilizar la lectura y escritura de decimales pudiendo interpretar el significado de cada cifra.
4	9, 10 y 11	Este nuevo grupo de actividades, en contexto intramatemático, además de permitir la revisión del uso de la calculadora, y su eventual familiarización para los niños que lo requieran, promueve la revisión de lo aprendido acerca del valor posicional explorando descomposiciones aditivas. Esto, a su vez, abre el trabajo con operaciones. Para adecuar la tarea a la diversidad de la clase se puede pedir a algunos niños que busquen nuevas descomposiciones para otros números.
5	12	Esta actividad permite un nuevo momento de evaluación. Puede hacerse primero de forma individual y luego escribir en un afiche con el grupo total de la clase una lista con las afirmaciones correctas, estimulando a los alumnos a que elaboren otras afirmaciones a partir de lo que han aprendido.

Actividades que pueden usarse para adecuar la secuencia en función de distintas necesidades

- Si quisiera adaptarse la secuencia para 4° grado podrían agregarse actividades similares a las planteadas en la etapa 1, reemplazando las actividades de la etapa 2 por otras manteniendo el contexto del dinero. Podrán tomarse por ejemplo, las que se incluyen en: Secuencia para escribir cantidades de dinero usando decimales. Matemática 4. NAP. Págs 65-70. Luego podrían realizarse las actividades 3 y 4 y adaptarse la 7 de modo que las cifras decimales sean 25, 50 para sistematizar las equivalencias y terminar allí la secuencia.
- Las actividades de la secuencia de las páginas 65 a 70 del Cuaderno NAP de 4° grado también podrían usarse como actividades de refuerzo para la actividad 1 en un quinto grado.
- Si el contexto del dinero y la medida fueran muy familiares para los niños, o se quisiera plantear otro uso para el que son necesarios los números racionales, puede incluirse en la segunda etapa la discusión de situaciones como la siguiente:

*Mirá cómo resolvió Manuel el siguiente problema.*

*Manuel:*

*Para hacer escarapelas se cortó una cinta de 4,5 metros en 4 partes iguales.*

*¿Cuánto se usó para cada escarapela?*

$$\begin{array}{r} 4,5 \overline{) 4} \\ 05 \overline{) 11} \\ \underline{1} \\ \phantom{1} \end{array}$$

*Rta: se usó 1,1 m para cada escarapela.*

a) *Decidí si es correcto lo que afirma Yahir:*

- *No puede sobrar, porque se corta en 4 y se usa todo. Da 1,125 m.*

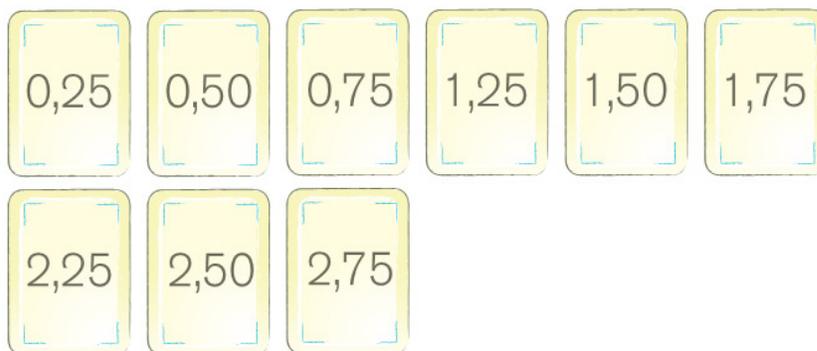
b) *¿Cómo pensás que obtuvo ese valor?*

c) *¿Qué indica la tercera cifra decimal del resultado?*

- Si se desea ampliar la variedad de descomposiciones y , a la vez, promover el cálculo mental se puede proponer jugar al “Cinco y medio” al finalizar la etapa 4.

**“El cinco y medio”:** suma de números decimales.

**Materiales:** se juega con las siguientes cartas, y se arma un mazo con cuatro de cada una.



**Organización de la clase:** se juega en grupo de 4 jugadores.

**Desarrollo:** se reparte una carta para cada jugador y tiene que pedir todas las cartas que quiera para tratar de aproximarse lo más posible a 5,5. Cada jugador decidirá cuándo le conviene “plantarse”, para no pasarse del valor indicado. Se anota un punto el jugador que más se acerque en cada vuelta.

FUENTE: Matemática 5 – Serie Cuadernos para el Aula. NAP. Pág. 107.

- Si se quisiera trabajar, por ejemplo en 6° grado, con otras magnitudes, se podría usar para la etapa 2 problemas como los siguientes, u otros similares, relacionados con temas que se estuvieran estudiando en Ciencias Naturales o Sociales. Para que la integración sea genuina es necesario que la resolución de los problemas aporte al tema en estudio.

*La siguiente tabla contiene los datos obtenidos al analizar el agua que una fábrica vierte a un arroyo.*

<i>Contaminante</i>	<i>Valores de la muestra (g/l)</i>	<i>Valores máximos admitidos (g/l)</i>
<i>A</i>	<i>0,3</i>	<i>0,29</i>
<i>B</i>	<i>0,50</i>	<i>0,1</i>
<i>C</i>	<i>3,25</i>	<i>2,451</i>
<i>D</i>	<i>2,30</i>	<i>2,300</i>
<i>E</i>	<i>0,03</i>	<i>0,30</i>

*¿Cuáles de los contaminantes de la muestra exceden los valores máximos admitidos? Explicá cómo pensaste en cada caso.*

Luego de un primer momento de resolución grupal se abrirá un espacio de discusión colectiva durante el cual se analizarán las diferentes respuestas y argumentos producidos por los alumnos, aprovechando la oportunidad para volver a trabajar sobre las relaciones que subyacen a la escritura decimal. Por ejemplo 2,30 es igual a 2,300 porque  $2,30 = 2 + \frac{30}{100}$  y  $2,300 = 2 + \frac{300}{1000}$  y además  $\frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$  por ser fracciones equivalentes, entonces  $2,30 = 2,300$

A continuación se podrían presentar otras situaciones para analizar y reflexionar acerca de posibles resoluciones erróneas. Por ejemplo:

*¿Cuáles de las siguientes argumentaciones son correctas? ¿Por qué?*

- 0,60 es mayor que 0,2 porque 60 es mayor que 2*
- 0,60 es mayor que 0,2 porque la cifra de los décimos es mayor*
- 0,04 es igual a 0,40 porque los ceros después de la coma no valen nada.*
- 6,15 es menor que 5,651 porque 5,651 tiene más cifras*
- 3,25 es mayor que 2,451 porque la parte entera 3 es mayor que 2*
- 0,19 es mayor que 0,2 porque 19 es mayor que 2*

Luego de una puesta en común donde el docente irá dirigiendo la discusión hacia cuáles son las estrategias válidas para comparar expresiones decimales el conjunto de la clase podrá enunciar cuáles son los criterios para comparar expresiones decimales y copiarlos en sus carpetas y/o confeccionar un afiche para colocar en algún lugar visible del aula y poder recurrir a él cuando lo considere necesario.

No debe olvidarse que es muy importante que los alumnos tengan oportunidad de volver a poner en juego las estrategias adquiridas. Se podrán proponer, entonces, nuevas actividades similares a las anteriores o como la siguiente:

En el laboratorio donde trabaja Luis hay un estante con frascos que contienen ácidos. Cada frasco tiene una etiqueta que indica la concentración del ácido en  $\text{g/cm}^3$ . Indica cómo ubicarías los frascos si deben estar ordenados de izquierda a derecha en forma creciente según su concentración (de menor a mayor).

a. 6,045 6,0453 6,405 6,040 6,4 6,04

## 2. Actividades para comparar números expresados en diferentes formas

Como ya se dijo, uno de los objetivos de la enseñanza de los números es que los alumnos sean capaces de reconocer las relaciones que existen entre diferentes formas de representación. Por eso es importante proponer situaciones donde se plantee la necesidad de ordenar y comparar números (en nuestro caso números racionales) dados en diferentes representaciones. En estas actividades los alumnos tendrán ocasión de volver a poner en juego las estrategias desarrolladas para transformar representaciones fraccionarias en decimales y viceversa. Un ejemplo de este tipo de actividades podrían ser las siguientes:

1) *Ordena de mayor a menor los siguientes números*

a) *Tres enteros, cinco décimos*

b) *3,050*

c) *3,15*

d) *Tres enteros, veinticinco centésimos*

e) *25/8*

2) *Completa con mayor, menor o igual según corresponda*

a) *0,1999.....0,2*

b)  $\frac{4}{100}$  .....0,40

c)  $\frac{50}{10}$  .....0,50

d) *4,5..... $\frac{4}{5}$*

e) *2,15..... $\frac{9}{4}$*

En todos los casos se espera que los alumnos desarrollen distintas estrategias de comparación y no que apliquen reglas mecánicas para comparar fracciones o decimales.

A continuación se detallan algunas posibles formas de resolución por parte de los alumnos.

a) Una respuesta errónea podría ser 0,1999 es mayor que 2 porque 1999 es mayor que 2 o porque tiene más cifras. En ese caso escribir ambos números como combinación de fracciones decimales y trabajar luego con la noción de equivalencia, podría ser una forma de hacerlos reflexionar acerca del error.

- b) En este caso se espera que los alumnos puedan reconocer el valor posicional del 4 en 0,40 donde 4 ocupa el lugar de los décimos, entonces 0,40 es igual a 4 décimos y  $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$  que es mayor que  $\frac{4}{100}$
- c) En este caso es posible que algunos alumnos reconozcan que 0,50 es igual a  $\frac{1}{2}$  que es menor que un entero, mientras que  $\frac{50}{10}$  es mayor que un entero con lo cual  $\frac{50}{10}$  es mayor que 0,50
- d) En este caso es posible que algunos alumnos digan que ambos números son iguales. Otros, probablemente apelen a la relación de  $\frac{4}{5}$  y 4,5 con respecto al entero.
- e) Algunos alumnos podrán expresar ambos números como fracciones decimales

$$2,15 = 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = \frac{200}{100} + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{215}{100}$$

Para buscar la fracción decimal equivalente a  $\frac{9}{4}$ , multiplica numerador y denominador por 25

$$\frac{9}{4} = \frac{225}{100}, \text{ que es mayor que } \frac{215}{100}$$

Otros podrán expresar  $\frac{9}{4}$  como número decimal apelando a los conocimientos que tienen de fracciones como parte del entero y al trabajo con medios y cuartos y decir que como  $\frac{4}{4} = 1$  entero, entonces  $\frac{8}{4}$  son dos enteros y me sobra  $\frac{1}{4}$  que es igual a 0,25. Por lo tanto  $\frac{9}{4}$  es 2,25 que es mayor que 2,15

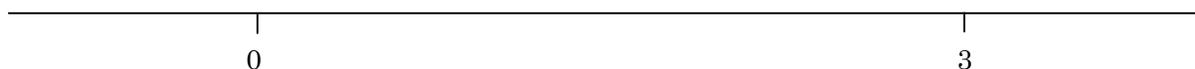
En todos los casos, las posibles estrategias no se agotan en las enunciadas sino que además puede ser que aparezcan combinaciones de las anteriores. Lo importante es que durante la puesta en común se analicen todas aquellas estrategias desplegadas, tanto correctas como incorrectas para que los alumnos puedan ir ampliando su repertorio de estrategias correctas como así también ir desechando las incorrectas.

Otro recurso útil para comparar números es la recta numérica. Este recurso seguramente ya fue utilizado con anterioridad para representar fracciones. Ahora se espera que los alumnos puedan extender el trabajo a la representación decimal. A continuación se proponen algunos ejemplos.

- 1) *En la siguiente recta numérica ubicá los números 1,5 2/5 y 1. Explicá cómo hiciste.*



- 2) *En la siguiente recta numérica ubicá los números 0 0,8 1,6 y 4/5. Explicá cómo hiciste.*



También podrían agregarse números dados en palabras. Por ejemplo, en la recta anterior se podría agregar el número **dos enteros, cuatro décimos**

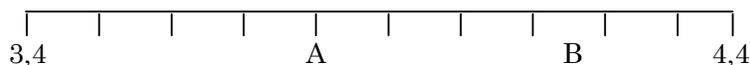
En estas actividades los alumnos se ven enfrentados a la necesidad de marcar la escala en la recta antes de comenzar a representar los puntos.

Al finalizar estas actividades es importante realizar una puesta en común para discutir sobre las diferentes estrategias utilizadas y aprovechar la ocasión para volver sobre las diferentes formas de representar números. Por ejemplo, para retomar el hecho de que, si bien un mismo número puede tener diferentes representaciones (0,8 y  $\frac{4}{5}$ ), como se trata del mismo número, le corresponde el mismo punto sobre la recta numérica. Para representar 1,6 algunos alumnos pueden argumentar que como 1,6 es el doble de 0,8 debe estar al doble de distancia del cero que 0,8

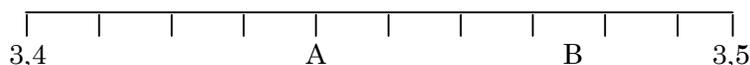
Otro tipo de actividad utilizando la recta numérica consiste en, dada una recta en la cual se han marcado algunos puntos, pedir a los alumnos que indiquen cuáles son esos puntos. Por ejemplo:

3) *En las siguientes rectas se utilizaron letras para representar números. ¿A qué número decimal corresponde cada letra?*

a)



b)



### 3. Actividades para registrar y comparar cantidades y números usando fracciones

Para dar continuidad al proceso de estudio y permitir que los alumnos vinculen lo nuevo que están aprendiendo con algo que ya saben, en distintos documentos de desarrollo curricular se sugiere iniciar el estudio de las fracciones en el segundo ciclo a partir del concepto de división entera, en situaciones en las que es necesario “seguir repartiendo” el resto de una división para cuantificar el resultado del reparto efectuado.

Dado que los alumnos pueden realizar los repartos de diversas maneras, esto lleva naturalmente a establecer la equivalencia entre los números que representan dichos repartos. De este modo, se comienza trabajando la noción de fracción como expresión del resultado de un reparto, a la vez que se descubren en forma paralela las escrituras equivalentes, las fracciones equivalentes y fracción de fracción. Este contexto también permite trabajar a la vez con fracciones mayores y menores que la unidad superando la progresión rígida, y poco fértil, de comenzar con las fracciones “propias” para pasar luego a las “impropias”.

Una propuesta del alcance para el trabajo con fracciones en cada grado podría ser la siguiente, teniendo en cuenta que que será necesario ir ampliando el repertorio progresivamente.

#### **Son aspectos de la noción de fracción que se podrían desarrollar en 4° grado:**

- Fracciones en contexto de reparto: situaciones de reparto en partes iguales en las que tiene sentido repartir el resto.
- Fracciones en contexto de medida: situaciones de medición en las que la unidad no entra una cantidad entera de veces en el objeto a medir.
- Fracciones equivalentes: aproximación a la noción en situaciones de reparto y medida. Diferentes representaciones de algunas fracciones. Determinación de longitudes y áreas con relación a una unidad utilizando fracciones de uso frecuente.
- Relaciones entre fracciones: reconstrucción de la unidad usando fracciones, comparación de fracciones.
- Suma y resta de fracciones con procedimientos no algorítmicos en contextos de medida (medios, cuartos, del metro, el litro, el kilo).

- Cálculos mentales: qué fracción es necesario sumar a una fracción dada para obtener un entero.

### **Son aspectos de la noción de fracción que se desarrollarán en 5° grado:**

- Las fracciones. Situaciones que significan diferentes funcionamientos de las fracciones.
- Relaciones entre fracciones: reconstrucción de la unidad conociendo la medida de una fracción de la misma, comparación de fracciones. Representación de fracciones en la recta numérica.
- Suma y resta de fracciones, elaboración y comparación de distintos procedimientos incluyendo los algoritmos convencionales.
- Cálculos mentales: para encontrar la fracción de un entero, para reconstruir una fracción o un entero usando fracciones de una o varias clases dadas.
- Multiplicación y división de una fracción por un número natural en situaciones de partición, reparto y medida.

### **Son aspectos de la noción de fracción que se desarrollarán en 6° grado:**

- La fracción como un cociente de números naturales: dados dos números naturales siempre es posible encontrar una fracción que multiplicada por uno de ellos, de como resultado el otro.
- La fracción como constante de proporcionalidad directa en problemas sencillos de porcentaje, escala, velocidad.
- Relaciones entre fracciones. Diferentes recursos para comparar fracciones.
- Representación de fracciones en la recta numérica
- Sistematización de recursos de cálculo mental para resolver sumas y restas.
- Multiplicación de fracciones como parte de parte y en el contexto de área.

### **Situaciones de reparto para iniciar el trabajo en 4to, 5to y 6to grado**

El conjunto de problemas que se propone a continuación apunta a resolver situaciones de reparto en las cuales se analizará si es posible repartir el resto.

En 4° y 5° grados:

*Situación 1) Se quieren repartir 3 tortas entre 4 chicos. ¿Cuánto le toca a cada uno?*

Se les pide que trabajen en grupos y, luego de un tiempo de exploración, se hace una puesta en común con los diferentes procedimientos.

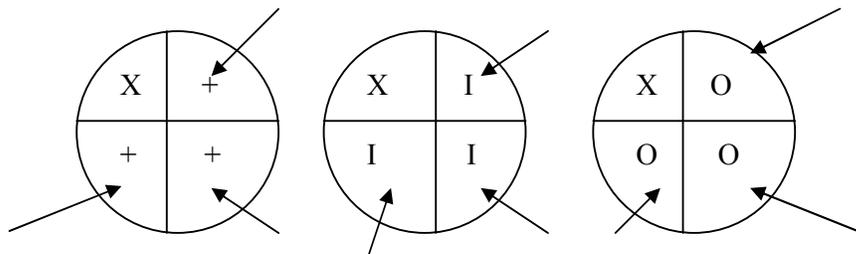
Algunas producciones de los alumnos pueden ser:

“Nosotros lo hicimos primero vimos que eran 4 chicos y dos tortas las partimos por la mitad a cada chico le tocó un pedazo de chocolate y sobró un chocolate y lo partimos en 4 partes.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Otros chicos pueden responder así  
 “Lo hicimos como se ve en el dibujo:



Al comparar los distintos procedimientos, puede verse que la cantidad de torta que le corresponde a cada chico es la misma en cada caso.

Complejización en 5º grado (además de retomar la situación anterior)

*Situación 2) Repartir 6 tortas entre 8 chicos. ¿Cuánto le toca a cada uno?*

En este caso la respuesta también es  $\frac{3}{4}$  y puede compararse el  $\frac{6}{8}$  con el  $\frac{3}{4}$  a través de un gráfico.

Se les puede pedir entonces a los alumnos que completen la siguiente tabla:

<b>Tortas</b>	3	6	12	15		
<b>Chicos</b>	4	8			1	2

Al completar esta tabla pueden destacarse diversas relaciones:

- Si se da como dato la cantidad de tortas y la cantidad de chicos, la respuesta es que en todos los casos le toca a cada chico  $\frac{3}{4}$  de torta.
- Si se da como dato la cantidad de tortas y cuánto le toca a cada chico, se puede calcular cuántos chicos había (es lo que se pide en la columna del 12 y del 15).
- Si se da la cantidad de chicos y cuánto le toca a cada uno se puede calcular la cantidad de tortas (columna del 1 y del 2).

En este tipo de problema, además de ponerse en juego el reparto, está involucrada una constante de proporcionalidad racional, aunque esto no se explicita. Además, como los chicos todavía no saben operar con las fracciones, no podrán resolverlo a través de una multiplicación, aunque sí con una suma.

Los procedimientos pueden variar según el caso:

$$1 \rightarrow \frac{3}{4}, 2 \rightarrow \frac{6}{4} \text{ sumando } \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 2 \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \text{ sumando } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ó } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

En cuarto grado

*Situación 3) Repartir 5 tortas entre 3 chicos. ¿Cuánto le toca a cada chico?*

La dificultad que tiene este problema es que hay que dividir en tercios y no en medios o cuartos, como en los anteriores, que son fracciones de uso más frecuente para los alumnos. Si intentan dividir sólo en medios o cuartos no podrán obtener el resultado.

Las respuestas obtenidas son:

- 1 torta a cada uno y sobran dos tortas. *Intervención del docente:* hay que repartirlas todas.
- Es probable que los alumnos no partan las tortas en partes iguales, surgiendo así la dificultad de “nombrar” las partes.
- Dejan 3 tortas enteras y dividen las dos restantes en tercios: Le toca a cada chico una torta y dos tercios.
- Dividen cada una de las tortas en tercios y hacen correspondencias entre los 3 chicos y cada una de las partes de la torta).  $1/3 + 1/3 + 1/3$ .
- Reparten 3 tortas enteras, una a cada chico. La cuarta y la quinta torta son partidas en mitades. 3 de esas mitades se reparten a cada uno. La otra mitad es dividida en tercios, uno para cada uno.  $1 + 1/2 + 1/6$

Luego de este problema es necesario hacer un trabajo sobre las distintas escrituras que se han obtenido para el mismo resultado y llegar a una escritura más sintética, que puede ser el número mixto  $1 \frac{2}{3}$ .

Es importante tener presente que es la primera vez que los alumnos se enfrentan al hecho de que la misma cantidad puede expresarse con “números diferentes”.

Proponemos no mantener la tradición de enseñanza habitual en la que primero se trabaja con fracciones de igual denominador para encarar después el aprendizaje de las de diferente denominador. Se trata de proponer que el trabajo gire en un principio alrededor de ciertas relaciones entre fracciones y entre fracciones y los enteros. Así, por ejemplo, un punto de partida puede ser establecer “puentes” entre sextos y tercios; cuartos, octavos y medios; quintos y décimos y entre todos ellos y los enteros, para ir ampliando a partir de los problemas este repertorio.

Las situaciones de reparto planteadas hasta aquí encierran dos problemas de índole diferente. El primero de ellos consiste en encontrar una manera de distribuir los chocolates y seguramente los alumnos lo resuelvan apelando a algún tipo de representación gráfica. Esta resolución echa mano de un procedimiento netamente empírico que no resulta muy exigente para ellos. El segundo problema, más complejo que el anterior, consiste en poder argumentar por qué los repartos son equivalentes. Posiblemente en un primer momento los niños intenten explicar las equivalencias “acomodando” los pedacitos unos debajo de otros. Si bien estos procedimientos se aceptarán en principio, se tenderá a que los alumnos se basen en relaciones para argumentar sobre la equivalencia. Se espera que los alumnos propongan por ejemplo: “ $2/4$  es lo mismo que  $1/2$  entonces  $3/4$  es lo mismo que  $1/2$  más  $1/4$ ”

Al trabajar de esta manera el problema deja de ser el reparto para pasar a ser la equivalencia. Las comprobaciones de tipo empírico, como la superposición de recortes de papel, deben ir sustituyéndose por la construcción de argumentos basados en otros conocimientos matemáticos como el usado antes para comprobar la equivalencia  $3/4 = 1/2 + 1/4$ .

No es evidente para los alumnos que al juntar los pedazos de torta se obtiene una cantidad igual a la torta original, con lo cual es necesario que este punto sea trabajado en clase. Será entonces necesario volver a juntar los pedazos cada vez luego de repartir, lo que a su vez sirve como un método de control de lo que se está haciendo.

Por ejemplo, si la respuesta es que a cada chico le toca  $1 + 1/2 + 1/6$ , el docente puede preguntar *¿Es cierto que juntando 3 veces estos pedazos se vuelven a tener las 5 tortas?*

Complejización en 5º grado (que retoma la situación anterior):

*Situación 4) Teniendo en cuenta que a cada chico le toca 1 y  $2/3$ , completar la tabla. (aquí se dan los resultados en las casillas grisadas)*

Tortas	5	20	10	15	5/3	10/3	20/3
Chicos	3	12	6	9	1	2	4

Este es un problema de proporcionalidad con constante racional (en este caso  $3/5$ ). Sin embargo, es posible resolverlo sin tener en cuenta el valor de la constante. Por ejemplo, los alumnos pueden argumentar que como  $20 = 4 \times 5$ , entonces la cantidad de chicos será  $3 \times 4$ , y así sucesivamente. Será tarea del docente pedirles a los alumnos que verifiquen que realmente a cada chico le tocará  $1$  y  $2/3$  de torta. Esta estrategia en principio será usada a pedido del docente pero es de esperar que sea tomada por los chicos como un mecanismo de control.

En 4° grado:

*Situación 5) Repartir 4 tortas entre 5 chicos. ¿Cuánto le toca a cada chico?*

Este problema vuelve a plantear la dificultad de partir una torta circular en 5 partes, ya que no se puede hacer dibujando diámetros. Sin embargo, es posible que los chicos hagan dibujos sin preocuparse porque las partes que quedan sean iguales. Nuevamente, será el docente quien plantee la pregunta acerca de cómo hicieron el reparto en 5 partes y cómo pueden estar seguros de que las partes son iguales.

Algunas escrituras que proponen los alumnos como respuesta son:

$$1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 = 4/5$$

$$1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5$$

$$4/5$$

$$1/2 + 1/4 + 1/20$$

Hasta aquí se eligió trabajar con más de una torta y no con una porque de esa manera se tiene la posibilidad de obtener fracciones menores que 1, mayores que 1, números mixtos y escrituras aditivas.

Los números mixtos son una manera cómoda de escribir, por ejemplo, que a cada chico le tocó 1 torta y  $2/3$ . Como los distintos procedimientos permitieron producir distintas formas de escritura, también es posible establecer que  $1 \frac{2}{3} = 5/3 = 4/3 + 1/3 = 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$ .

Otra posibilidad de aprovechamiento de estos problemas es comparar fracciones. Por ejemplo, si el problema es “¿En cuál caso cada chico come más torta: si se reparten 6 tortas entre 8 chicos o si se reparten 4 tortas entre 6 chicos?”

Una manera de resolverlo es haciendo un dibujo analógico.

Otra manera consiste en pensarlo con una tabla invitándolos a buscar alguna cantidad que se repita, aunque probablemente este tipo de resoluciones aparezca hacia el 5to grado.

Tortas	6	9	12	18
Chicos	8	12	16	24

Tortas	4	8	12	16
Chicos	6	12	18	24

Entonces, cuando la cantidad de tortas es la misma (12), en la tabla de arriba se distribuyen entre menos chicos, por lo que los chicos del 1° grupo comen más torta. Este razonamiento permite decidir que  $3/4 > 2/3$ .

También podemos buscar donde coincide la misma cantidad de chicos (24). Puede verse que en la tabla de arriba les corresponde más tortas, es decir que  $18/24 > 16/24$ , lo que implica que  $6/8 > 4/6$ .

En este tipo de problemas aparecen las fracciones equivalentes. Será tarea del docente reconocer y nombrar estos objetos nuevos que han aparecido en el trabajo de los alumnos.

## Situaciones en el contexto de la medida de longitudes y superficies

Cuando surge la necesidad de medir magnitudes continuas, los números naturales se muestran insuficientes. Se plantean aquí dos posibilidades:

- que lo que se desea medir pueda obtenerse a partir de una subdivisión de la unidad (la medida se expresará con un número racional)
- o que eso no sea posible (la medida es un número irracional).

En el 1º caso es donde aparecen las fracciones. Si bien las fracciones no sirven para representar cantidades irracionales, en la práctica podemos usarlas para aproximarnos tanto como queramos al valor de la medida. Aunque no se obtenga un resultado exacto y, dependiendo del problema, esto podría resultar útil.

Hay distintas actividades que se pueden plantear para poner en juego a las fracciones para medir.

Para el caso de longitudes se puede plantear una actividad con tiras de papel.

Se divide a la clase en una cantidad par de grupos. A cada grupo se le entrega una tira de papel blanca (a cada grupo de una longitud diferente, 9 cm, 4 cm, 3 cm) y una tira de cartulina de color de igual medida para todos (12 cm).

Cada equipo tiene que escribir un mensaje con palabras o números, sin usar dibujos, para que el otro equipo pueda cortar una tira de papel de igual longitud a la del grupo emisor. Para determinar el largo no es posible usar regla y, como ninguna tira mide una cantidad entera de unidades, será necesario fraccionar la unidad.

Una vez que los grupos receptores recortaron las tiras según las instrucciones de los emisores, se comparan las tiras del grupo emisor y receptor. Si no coinciden se analizan los mensajes para ver por qué no fueron comprendidos.

Las fracciones a considerar para una primer resolución del problema deben ser medios, cuartos u octavos, porque se pueden obtener plegando la tira de papel. Para fracciones de denominador impar se abre una nueva problemática que tiene que ver con cómo hacer para fraccionar la unidad en una cantidad impar de partes iguales.

Los primeros mensajes producidos suelen ser bastante coloquiales y no usan números y muchas veces se necesita ajustar la consigna. Se pueden agregar condiciones como que el mensaje sea lo más corto posible o que sólo incluya números. De esta manera aparece la necesidad de introducir la notación fraccionaria.

Cabe aclarar que este tipo de situaciones en las que hay que elaborar, interpretar y comparar mensajes, donde se trabaja a la vez sobre competencias ligadas a la comunicación, necesitan bastante tiempo para su desarrollo en clase y que no es conveniente “apurar” a los alumnos. Lo importante no es llegar rápido al resultado sino participar de ese proceso.

Al hacerlo varias veces para diferentes fracciones, surgirán ciertas relaciones en la clase, que los chicos podrán reutilizar en nuevas situaciones; por ejemplo:

$$\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u = u,$$

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{4} u = \frac{1}{8} u,$$

$$\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}u = u,$$

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{3}u = \frac{1}{6}u.$$

Esta tarea puede plantear situaciones que pueden resolverse en el momento o dejarse pendientes:

- Juntando cuartos puedo armar medios, pero con tercios no puedo hacerlo.
- Para armar medio con tercios tengo que hacer un tercio más medio tercio.

Actividades como la enunciada también pueden usarse para introducir el cálculo mental con fracciones:

- ¿Cuánto es la mitad de  $\frac{1}{4}$ , de  $\frac{1}{8}$ , de  $\frac{1}{16}$ , etc.?
- Cuánto es la tercera parte de  $\frac{1}{2}$ , de  $\frac{1}{3}$ , de  $\frac{1}{4}$ ?

Otro uso de las fracciones para medir tiene que ver con los problemas donde, a partir de una fracción de un todo, se pide reconstruir la unidad. Por ejemplo, dado un segmento que mide  $\frac{2}{5}$ , dibujar el segmento unidad y encontrar una manera de probar que el resultado es correcto.

Este es un problema complejo, porque es inverso a los problemas dados habitualmente. Es común que los chicos dibujen  $\frac{2}{5}$  del segmento dado, y ese error es interesante para discutir grupalmente.

Un inconveniente que puede surgir tiene que ver con cómo hacer para dibujar, por ejemplo, la mitad de un segmento dado. En los primeros grados, seguramente se hará midiendo con una regla, pero en los grados superiores es deseable que los alumnos dispongan de otras herramientas para hacerlo (aplicando Thales con los renglones de una hoja o dibujando la mediatriz).

#### *Problemas de medida (4° grado)*

*Situación 1) ¿En cuál de los siguientes dibujos se pintó la cuarta parte? Explicá cómo lo pensaste.*



En el 1°, 2° y 4° se pintó un cuarto. Es interesante la comparación entre el 1° y 2°, porque no es necesario tener el entero partido en 4 partes iguales para saberlo. En el caso del 2° dibujo es necesario poner en juego que lo pintado es  $\frac{1}{4}$  porque son necesarias 4 de esas piezas para cubrir el entero. Otra cuestión a destacar es que se puede obtener cuartos con formas distintas.

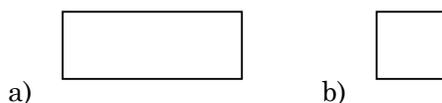
En el caso del 3° dibujo, lo sombreado es  $\frac{1}{6}$  porque con 6 de esas piezas se obtiene el entero.

*Situación 2) ¿En qué casos se ha pintado  $\frac{3}{4}$  del rectángulo?*



En el 1° y 2° es  $\frac{3}{4}$ , mientras que en el 3° es  $\frac{1}{3}$ .

*Situación 3) Cada uno de los siguientes dibujos representa  $\frac{1}{4}$  de una tira de papel. Dibujá en cada caso la tira de papel entera, es decir la unidad.*



En este problema se pone en juego que no hay un único entero tal que  $\frac{1}{4}$  sea la parte representada.



Situación 4) ¿Con qué fracción de este entero  representarías el siguiente dibujo?



Acá es necesario determinar qué parte está sombreada en la 2º figura. Para eso, se puede medir con el compás y ver con cuántas de esas medidas se forma el entero.

Situación 5) Una persona midió su altura con una varilla como la siguiente y obtuvo como resultado que mide 17 “varillas”.



Luego midió nuevamente su altura con otra varilla y obtuvo 34 “varillas”. ¿Es posible dibujar la varilla que tomó como unidad de medida en este último caso? Justificá tu respuesta.

Si necesitó el doble de varillas es porque la unidad de medida era la mitad de la anterior.

Situación 6) El largo del rectángulo es de  $5\frac{1}{2}$  unidades. Dibujá la unidad de medida que se usó para medirlo. (Mide 11 cm.)



En este caso, primero hay que ver cuántos medios hay en  $5\frac{1}{2}$ , o sea  $11/2$ . Entonces, es necesario dividir el rectángulo en 11 partes iguales, de las cuales cada una es  $\frac{1}{2}$ . Por lo tanto, dos de esas partes hacen un entero.

Situación 7) Tomá como unidad de medida esta tira. 

Sin usar regla, calculá la longitud de las siguientes tiras:

a)



b)



Explicá el procedimiento que usaste.

Situación 8) Tomá como unidad de medida la siguiente tira. 

Sin usar regla, calculá la longitud de las siguientes tiras:

a)



b)



Situación 9) Las siguientes son las medidas de 3 segmentos que se han medido con la misma unidad:  $\overline{AB} = 1\frac{1}{4}$ ,  $\overline{CD} = \frac{5}{4}$ ,  $\overline{EF} = 1\frac{1}{2}$ . Ordená de menor a mayor los 3 segmentos.

Para poder comparar las fracciones tendrán que llevarlas a denominadores comunes, apoyándose en relaciones entre medios y cuartos.  $1\frac{1}{4}$  es  $\frac{4}{4}$  más  $\frac{1}{4}$ , o sea  $\frac{5}{4}$ , por lo tanto, AB y CD miden lo mismo. EF es 1 entero,  $\frac{4}{4}$  y  $\frac{1}{2}$ , que es  $\frac{2}{4}$ . Entonces EF es  $\frac{6}{4}$ . Se obtiene que  $AB = CD < EF$ .

Situación 10) Tomando la siguiente tira como unidad de medida (6 cm.) dibujá una tira de  $1\frac{1}{2}$  de longitud, otra de  $\frac{3}{4}$  de longitud y una tercera tira de  $10/3$  de longitud.

Con la primera medida no hay problemas. Para la segunda es necesario primero ver qué longitud corresponde a  $\frac{1}{4}$  (pueden decir, la mitad es 3 cm y la mitad de la mitad 1.5 cm.) y a partir de ahí tomar 3 de  $\frac{1}{4}$ .

Para dibujar uno de  $\frac{10}{3}$  de longitud, pueden primero ver que en  $\frac{10}{3}$  hay 3 enteros y  $\frac{1}{3}$  y que  $\frac{1}{3}$  de 6 cm. es 2 cm.

*Situación 11) En una jarra que tiene capacidad para 3 litros hay  $1\frac{1}{4}$  litro de jugo. Si al día siguiente la jarra tenía  $\frac{1}{2}$  litro más, ¿cuántos litros faltaban para que estuviera totalmente llena?*

En  $1\frac{1}{4}$  litro hay  $\frac{5}{4}$  de litro. Si se le agrega  $\frac{1}{2}$  litro, o sea  $\frac{2}{4}$ , va a haber  $\frac{7}{4}$ . En 3 litros hay  $\frac{12}{4}$ , entonces faltan  $\frac{5}{4}$  para completar la jarra.

*Situación 12) ¿Cuántos vasos de  $\frac{1}{4}$  litro se necesitan para llenar una jarra de  $2\frac{1}{2}$  litros? ¿y para llenar otra de  $\frac{10}{8}$  litros?*

En  $2\frac{1}{2}$  litros hay  $\frac{8}{4} + \frac{2}{4} = \frac{10}{4}$  litros, entonces se necesitan 10 vasos de  $\frac{1}{4}$ .

En  $\frac{10}{8}$  hay  $\frac{5}{4}$  (cada  $\frac{2}{8}$  hacen  $\frac{1}{4}$  porque  $\frac{1}{8}$  es la mitad de  $\frac{1}{4}$ ), entonces se necesitan 5 vasos de  $\frac{1}{4}$ .

## 6º grado

*1) En cada una de las siguientes rectas representé algunos números usando puntos. Te desafío a que descubras qué números representé con las letras A, B y C en cada caso. Explicá cómo pensaste en cada caso.*

Instrucciones para el maestro:

a) Sobre un segmento de recta, ubicar marcas rotuladas 0 y 1 separadas por 4 cm. Ubicar el punto C a 1 cm. del 0, el punto A a 1 cm. a la derecha del 1 y el punto B a 4 cm. a la derecha de 1.

Respuestas: C es  $\frac{1}{4}$ , A es  $\frac{5}{4}$  y B es 2.

b) Sobre un segmento de recta, ubicar marcas rotuladas 0 y 1 separadas por 2 cm. Ubicar el punto A a 1 cm. del 0, el punto B a 2 cm. a la derecha del 1 y el punto C a 1.5 cm. a la derecha de B.

Respuestas: B es  $2\frac{1}{2}$ , A es 5 y C,  $5\frac{3}{4}$ .

c) Sobre un segmento de recta, ubicar marcas rotuladas 0 y 1, separadas por 5 cm. Ubicar el punto A a 1 cm. del 0, el punto B a 2 cm. a la derecha del 1 y el punto C a 1,5 cm. a la derecha de B.

Respuestas A es  $\frac{1}{5}$ , B,  $\frac{7}{5}$  y C,  $\frac{8}{5} + \frac{1}{10} = \frac{16}{10} + \frac{1}{10} = \frac{17}{10}$ .

d) Sobre un segmento de recta, ubicar marcas rotuladas  $\frac{1}{2}$  y 1, separadas por 2 cm. Ubicar el punto A a 1 cm. del 0 y el punto B a 18 cm. del 0.

Respuestas: A es  $\frac{1}{4}$  y B,  $3\frac{4}{5}$ .

*2) Martín tiene 3 tableros y en cada uno hay dibujada una recta.*

(3 rectas con marcas para el 0 y el 1, en la primer recta la distancia entre las marcas es de 2 cm., en la segunda recta la distancia es de 1.5 cm. y en la tercera es de 4 cm).

*El juego consiste en tirar un dardo dos veces a cada tablero, desde una cierta distancia, y caer lo más cerca posible de 0.*

En los dos primeros tiros al tablero 1, el dardo cayó en los puntos correspondientes a  $5/4$  y a  $3/8$ . En los dos tiros al tablero 2, el dardo cayó en los puntos correspondientes a  $1/3$  y  $5/6$ . Y en los últimos dos tiros, el dardo cayó primero en el punto correspondiente a  $1/2$  y después en  $3/4$ . Marcá en cada caso las posiciones donde cayeron los dardos e indicá cuál fue el tiro que estuvo más cerca de 0.

Respuestas

Tablero 1:  $5/4$  es mayor que 1 y  $3/8$  es menor, por lo que  $3/8$  está más cerca de 0.

Tablero 2:  $1/3$  es  $2/6$ , que es menor que  $5/6$ .

Tablero 3:  $1/2$  es  $2/4$ , que es menor que  $3/4$ .

Entonces, ahora es necesario analizar cuál es menor entre  $3/8$ ,  $1/3$  y  $1/2$ .

$$3/8 < 4/8 = 1/2$$

$1/8$  es el triple de  $1/24$ , entonces  $1/8 = 3/24$  y  $3/8 = 9/24$ .

$1/3$  es 8 veces  $1/24$ , entonces  $1/3 = 8/24$ . Por lo tanto,  $1/3 < 3/8$ .

3) Una persona tiene  $3\frac{1}{2}$  kg de harina.

a) ¿Cuántos kilos le faltan para completar los 7 Kg?

b) Si necesita  $2\frac{1}{4}$  kg para una comida, ¿cuántos kilos le sobran?

Respuestas

a) Faltan  $3\frac{1}{2}$ .

b) En  $3\frac{1}{2}$  kg hay  $3\frac{2}{4}$ , entonces sobran  $1\frac{1}{4}$  kg.

4) Representá en la misma recta las fracciones  $2/4$ ,  $7/2$ ,  $7/4$ ,  $10/5$ ,  $5/10$ .

Para poder representar estas fracciones al alumno se le plantea el problema de qué escala conviene elegir. Deberá acordarse de que conviene tomar un múltiplo de 4 y 10, o sea cualquier múltiplo de 20.

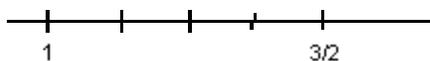
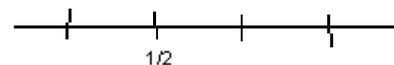
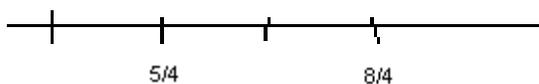
5) a) Representá en la siguiente recta (0 y 1 marcados a 8 cm de distancia) dos fracciones que estén entre  $1/2$  y  $1/4$ .

b) Ídem a), pero representando 3 fracciones.

En este problema no alcanza con escribir las fracciones con el mismo denominador ( $1/4$  y  $2/4$ ), sino que es necesaria otra estrategia.

6) En cada una de las siguientes rectas, cada rayita representa un número. Algunos de estos números se borraron. Encontrá estos números y escribilos, en los casos en que sea posible.

c)



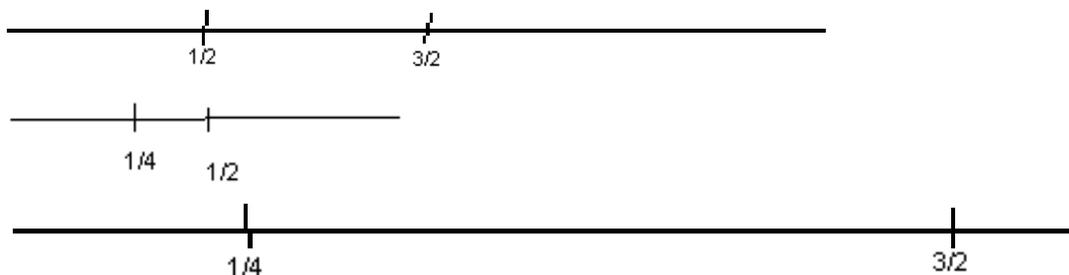
Respuestas:

En el primer gráfico los alumnos tienen que darse cuenta de que los números que faltan están en medio de otros escritos en cuartos, por lo que conviene expresarlos en octavos.  $5/4$  es  $10/8$  y  $8/4$  es  $16/8$ , entonces los números que faltan son  $9/8$  y  $11/8$ .

En el 2º gráfico no se puede saber porque no se sabe qué unidad se usó.

En el 3º, la distancia entre 1 y  $3/2$  es  $1/2$  y está dividida en 4 partes, por lo cual cada una es  $1/8$ . Las rayitas representan, entonces a  $9/8$ ,  $10/8$  y  $11/8$ .

7) ¿Podés saber en las siguientes rectas dónde se encuentran el 0 y el 1? ¿Por qué?



Respuestas:

1. Sabemos la distancia entre  $1/2$  y  $3/2$  es de  $2/2 = 1$ , por lo tanto en la mitad está el 1. Tomando la  $1/2$  de la unidad hacia la izquierda de  $1/2$  está 0.
2. La distancia entre  $1/4$  y  $1/2$  es  $1/4$ , tomando  $1/4$  hacia la izquierda de  $1/4$  está 0 y  $2/4$  hacia la derecha de  $1/2$  está 1.
3.  $3/2$  es  $6/4$ , entonces la distancia entre los números es de  $5/4$ , que mide 10 cm., entonces  $1/4$  es 2 cm. Tomando esa distancia hacia la izquierda de  $1/4$  está 0 y 3 veces esa distancia hacia la derecha de  $1/4$  está 1.

En general en la escuela no suele enseñarse cómo se hace para partir un segmento en una cantidad determinada de partes iguales. En ese caso, se soluciona dándoles a los alumnos un segmento con una medida conveniente como para que no surja la dificultad de cómo proceder cuando la longitud no es divisible por la cantidad de partes.

Un trabajo posterior que se propone es plantearles a los chicos un problema donde ellos tengan que elegir la longitud del segmento convenientemente cuando, por ejemplo, tienen que graficar tercios y medios en el mismo segmento.

En grados superiores se puede trabajar el método de las rectas paralelas (Thales), que es aceptado intuitivamente, para dividir un segmento en cualquier cantidad de partes iguales.

#### 4. Actividades para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo con expresiones decimales

El trabajo se inicia con el planteo de situaciones que requieran de la multiplicación y división por la unidad seguida de ceros, para luego desarrollar actividades de suma y resta, continuar con problemas que impliquen multiplicaciones y finalizar con problemas de división.

- Multiplicación y división por la unidad seguida de ceros

Es conveniente comenzar el trabajo con problemas en el contexto del dinero pues permite a los alumnos utilizar la relación entre pesos y centavos para hallar la relación entre décimos y centésimos, que pasará a trabajarse luego en otros contextos. Proponemos comenzar la clase pidiendo a los alumnos que, reunidos en parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1) Martín tiene 10 monedas de 1 centavo, Lautaro tiene 10 monedas de 10 centavos, Julia tiene 100 monedas de 1 centavo y Joaquín tiene 100 monedas de 10 centavos. ¿Cuánto dinero tiene cada uno? Explicá cómo pensaste en cada caso.

2) Francisco resolvió el problema anterior haciendo los siguientes cálculos, pero se olvidó de indicar cuál es el cálculo que corresponde a cada uno de los chicos. Uní con flechas el nombre de cada chico con el cálculo correspondiente.

$100 \times 0,10$	Martín
$10 \times 0,01$	Lautaro
$100 \times 0,01$	Julia
$10 \times 0,10$	Joaquín

3) Resolvé los siguientes cálculos y verificá tus resultados usando una calculadora

- a)  $10 \times 2,45 = \dots\dots\dots$
- b)  $100 \times 5,7 = \dots\dots\dots$
- c)  $7,85 \times 100 = \dots\dots\dots$
- d)  $3,65 \times 10 = \dots\dots\dots$
- e)  $3,4641 \times 1000 = \dots\dots\dots$

¿Qué conclusión puedes sacar observando los resultados obtenidos?

A continuación el docente pedirá a los alumnos que se reúnan en grupos de cuatro integrantes y discutan las conclusiones obtenidas.

Luego, el docente puede pedir que cada grupo designe un representante para exponer los resultados y las conclusiones obtenidas al resto de la clase. Es importante que se expongan tanto las resoluciones correctas, como las incorrectas y se sometan al debate, que será guiado por el docente, eligiendo el orden en que las producciones de los alumnos serán analizadas actuando de mediador de las discusiones colectivas. Finalizada esta etapa es importante que la clase haya llegado a algún acuerdo en común.

Es importante tener en cuenta que el objetivo de las actividades anteriores no es dar recetas tales como “correr la coma” sino trabajar sobre las relaciones entre fracciones decimales y expresiones decimales. Puede que los alumnos traten de explicar cómo y por qué se corre la coma, pero no es probable que sean explicaciones completas. Por ese motivo es importante que, luego de la puesta en común por parte de los alumnos, sea el docente quien complete la explicación. Una forma de hacerlo puede ser la siguiente:

$$\begin{aligned} 7,85 \times 100 &= (7 + 0,8 + 0,05) \times 100 \\ &= \left(7 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100}\right) \times 100 \\ &= 7 \times 100 + \frac{8}{10} \times 100 + \frac{5}{100} \times 100 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} &= 700 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \\ &= 700 + 80 + 5 = 785 \end{aligned}$$

Por último, y como una manera de volver a poner en juego lo aprendido, se puede pedir que los alumnos resuelvan actividades como la siguiente:

- 4) Completa los siguientes cálculos
- a.  $57,894 \times \dots\dots\dots = 5789,4$
  - b.  $0,0254 \times \dots\dots\dots = 254$
  - c.  $3,25 \times \dots\dots\dots = 32,5$

Asimismo, la actividad anterior puede utilizarse como punto de partida para analizar las relaciones producto-cociente (la posibilidad de plantear dos divisiones a partir de un producto) y pasar luego a analizar qué sucede cuando dividimos por la unidad seguida de ceros. Por ese motivo, una vez resueltos los primeros tres cálculos, sugerimos que el docente intervenga realizando la siguiente pregunta:

*¿Es posible utilizar el último cálculo para resolver estos otros? Explicá por qué.*

d.  $32,5 : 10 = \dots\dots\dots$

e.  $32,5 : 3,25 = \dots\dots\dots$

Una vez que los alumnos hayan resuelto estos dos ítems se realizará una nueva puesta en común de los resultados obtenidos y procedimientos utilizados, finalizada la cual proponemos pasar a las siguientes actividades:

5) *Resolvé los siguientes cálculos y verificá tus resultados usando una calculadora.*

a)  $8,23 : 10 =$

b)  $7,34 : 100 =$

c)  $234,5 : 1000 =$

6) *Sin hacer los cálculos resolvé las siguientes divisiones*

a)  $3,456 : 34,56 =$

b)  $34,56 : 3,456 =$

c)  $3,345 : 345,6 =$

Por último es importante que los alumnos tengan ocasión de volver a utilizar las estrategias adquiridas hasta el momento. Para ello proponemos las siguientes actividades: a) problemas donde se les pida plantear cálculos que den un resultado dado, por ejemplo:

7) *Escribir por lo menos 3 divisiones entre decimales que den por resultado*

a)  $0,1$

b)  $10$

c)  $100$

d)  $0,01$

8) *Completá los siguientes cálculos.*

a)  $\dots\dots\dots : \dots\dots\dots = 2,5$

b)  $\dots\dots\dots : \dots\dots\dots = 0,32$

c)  $\dots\dots\dots : \dots\dots\dots = 15$

*Compará con las cuentas que escribieron tus compañeros. ¿Todos hicieron los mismos cálculos? ¿Por qué?*

b) También se pueden proponer problemas en los que haya que analizar la verdad o falsedad de ciertos enunciados, por ejemplo:

9) *En la clase de matemática la maestra les pidió a los chicos que hicieran el siguiente cálculo:*

$$7,80 : 10 =$$

*Estas son algunas de las respuestas de los alumnos*

*Pedro : para dividir  $7,80 : 10$  podemos simplificar los ceros y queda  $7,8$*

*Tamara: como hay que dividir por 10 corremos la coma un lugar a la izquierda y queda  $0,78$*

*Ayelen: Como  $0,78 \times 10 = 7,8$  y  $7,8$  es lo mismo que  $7,80$ , entonces  $7,80$  dividido 10 es  $0,78$*

*¿Quién tiene razón? ¿Se te ocurre otra forma de hacer el cálculo? Explicala*

- **Suma y resta**

Para comenzar a trabajar la suma y resta de expresiones decimales, el docente deberá proponer actividades tendientes a que el alumno haga uso de sus conocimientos anteriores acerca del carácter posicional de la escritura decimal.

En ese sentido, los cálculos mentales resultan por demás efectivos. Por ello proponemos que los docentes trabajen con actividades como la siguiente:

10) *Calculá mentalmente*

a)  $8,53 + 0,01$

b)  $3,45 + 0,1$

c)  $5,90 + 2,10$

d)  $23,56 - 0,01$

e)  $47 - 0,01$

f) *La mitad de 16.40 es*

g) *El doble de 0,08 es*

11) *¿Qué número hay que sumar o restar a cada uno de los siguientes números para llegar al entero más cercano?*

a) 3,9

b) 25,1

c) 45, 01

d) 0,09

e) 47,99

12) *¿Qué número hay que .....*

a) *sumarle a 3,45 para llegar a 5 enteros*

b) *restarle a 2,19 para llegar a 1 entero*

c) *sumarle a 3,45 para llegar a 7,78*

d) *restarle a 2,1 para llegar a 2,005*

A continuación, y con el objetivo de favorecer el desarrollo de diferentes estrategias para sumar y restar decimales, proponemos trabajar con problemas que se puedan resolver mediante sumas y restas, realizando un posterior análisis de los procedimientos utilizados.

Nuevamente es conveniente comenzar a trabajar en el contexto del dinero porque la descomposición de las cantidades en pesos y centavos favorece el desarrollo de estrategias que podrán utilizarse luego para un adecuado trabajo con decimales en otros contextos. Las actividades 13 y 14 son dos ejemplos de estos tipos de problemas

## 13) Colocar diferentes tickets

*Germán salió de compras. Estos son los tickets de las compras que hizo. Si salió de su casa con un billete de \$100, ¿con cuánto dinero volvió?*

14) *Carolina fue al supermercado y compró varios artículos que le costaron: \$25,50; \$9,90; \$17,55 y \$ 32, 28. Pagó con \$ 100 y le dieron \$ 12,70 de vuelto. ¿Le dieron bien el vuelto? ¿Por qué?*

Una vez que los alumnos hayan resuelto los problemas se procederá a realizar una puesta en común, donde los alumnos expondrán sus diferentes formas de resolución para ser analizadas por la clase. Luego es conveniente proponer un problema en otro contexto, donde se espera que los alumnos puedan trabajar con la descomposición de los números en función de sus valores posicionales y hagan extensivas al cálculo decimal, las propiedades utilizadas para sumar naturales. Por ejemplo:

15) *En la verdulería de Pablo hay una balanza electrónica. Pablo pesó una bolsa de naranjas y la balanza marcó 5,48. Después pesó otra bolsa de naranjas y la balanza marcó 6,79. ¿Cuántos kilos de naranja pesó en total?*

El docente puede pedir a los alumnos que resuelvan el problema en pequeños grupos para luego realizar una puesta en común durante la cual se discutirán y analizarán las diferentes formas de resolución llevadas a cabo por los alumnos.

Algunas posibles formas de resolución son:

- ✓ Primero sumo los \$  $5 + 6 = 11$  después sumo los centavos  $48 + 79 = 127$  y como 127 centavos es \$ 1 con 27, le agrego 1 peso a los 11 y tengo en total \$12,27
- ✓ Primero hago  $6 + 5 = 11$  después sumo los décimos  $4 + 7 = 11$  y por último los centésimos  $8 + 9 = 17$  Con 17 centésimos tengo 7 centésimos y 1 décimo que se lo agrego a los 11 que ya tenía y ahora tengo 12 décimos que son 2 décimos y un entero que se lo puedo agregar a los 11 que ya tenía, llegando a un total de 12 enteros, 2 décimos y 7 centésimos, o sea 12.27
- ✓ Quizás algunos alumnos ya utilicen la suma vertical.

Como en este problema no se van a presentar dificultades en cuanto al ordenamiento de las cifras pues ambos números tienen igual cantidad de cifras enteras y decimales, se puede propiciar el análisis del algoritmo y su relación con las otras formas de resolución. Sin embargo, es importante tener en cuenta que es conveniente que los alumnos trabajen con el análisis del algoritmo luego de que dispongan de varias formas de resolución que puedan apoyarse en explicaciones matemáticas y no antes, pues de lo contrario mecanizarán la forma de resolución y no podrán dar sentido a sus resoluciones.

A continuación se podrían presentar problemas de resta, que permitan el desarrollo de diferentes estrategias de cálculo. Por ejemplo:

16) *En una carrera, el corredor que llegó primero hizo un tiempo de 4,52 minutos y el que llegó último tardó 7,15 minutos en recorrer todo el trayecto. ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre el primer y el último corredor?*

Algunas posibles formas de resolución son:

$$\begin{aligned}
 \checkmark \quad 7,15 - 4,52 &= 7,15 - 4 - 0,52 \\
 &= 3,15 - 0,02 - 0,50 \\
 &= 3,13 - 0,50 \\
 &= 2,13 + 1 - 0,50 \\
 &= 2,13 + 0,50 \\
 &= 2,63
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \checkmark \quad 7,15 \\ - \quad 4,52 \\ \hline \quad 2,63 \end{array}$$

- ✓ También puede suceder que los alumnos cometan errores en algún momento de la resolución, como por ejemplo

$$\begin{aligned} 7,15 - 4,52 &= 7,15 - 4 - 0,52 \\ &= 3,15 - 0,02 - 0,5 \\ &= 3,13 - 0,5 \\ &= 3,8 \text{ ó } 3,08 \end{aligned}$$

Donde hay un error en el último paso, que proviene de confundir 13 centésimos con 13 décimos y restarle los 5 décimos.

Al igual que con el algoritmo de la suma, el uso y análisis del algoritmo de la resta debe realizarse, únicamente, luego de que los alumnos dispongan de varias formas de resolución que puedan apoyarse en explicaciones matemáticas.

Al finalizar la puesta en común, el docente puede guiar a la clase para que, entre todos, hagan una lista de cuestiones a tener en cuenta para sumar y restar decimales. Esa lista podrá ser copiada por los alumnos en sus cuadernos o en un afiche que quedará en la clase, a la vista de todos, para que los alumnos puedan recurrir a él cada vez que lo consideren necesario.

Otras actividades, tendientes a que los alumnos tengan ocasión de volver a poner en práctica lo aprendido, pueden consistir en proporcionar a los alumnos una serie de cálculos de suma y resta con sus respectivos resultados y pedirles que indiquen si esos cálculos son correctos o no, justificando sus decisiones y/o verificando luego con una calculadora.

### • Multiplicación

Antes de comenzar el trabajo de multiplicación entre decimales, es conveniente comenzar a trabajar con problemas donde haya que multiplicar un decimal por un entero, pues este tipo de problemas permite que los alumnos puedan utilizar, como punto de partida, sus conocimientos acerca de multiplicación de naturales como suma reiterada, en caso de que aún no puedan recurrir a otro tipo de estrategias. Por ejemplo, el docente puede pedir que los alumnos resuelvan problemas como el siguiente:

1) *En el almacén venden una lata de tomates a \$ 2,35. Juan compró 5 de esas latas. ¿Cuánto le cobraron?*

Algunas posibles formas de resolución son:

- ✓ Sumar 5 veces 2,35
- ✓ Como 5 se puede descomponer en 2+2+1, primero calcular  $2,35 \times 2 = 4,70$ , luego duplicar ese resultado  $4,70 \times 2 = 9,40$  y por último sumar  $9,40 + 2,35 = 11,75$
- ✓  $2,35 \times 5 = (2 + 0,35) \times 5 = 10 + 0,35 \times 10 : 2 = 10 + 3,5 : 2 = 10 + 1,75 = 11,75$
- ✓  $2,35 \times 5 = (2 + 0,3 + 0,05) \times 5 = 10 + 1,5 + 2,25 = 11,75$
- ✓  $2,35 \times 5 = (2,35 \times 10) : 2 = 23,5 : 2 = 23 : 2 + 0,5 : 2 = 11,5 + 0,25 = 11,75$

Al finalizar estas actividades es importante realizar una puesta en común para discutir acerca de las diferentes formas de resolución utilizadas, inclusive las incorrectas, pues esto permitirá que los alumnos amplíen y mejoren su repertorio de estrategias.

Una vez finalizada la etapa anterior, el docente podría pedir a los alumnos que resolvieran algunos problemas más, similares a los anteriores, para que los alumnos tengan ocasión de volver a utilizar lo aprendido.

Posteriormente se trabajará con problemas que impliquen la multiplicación entre decimales, por ejemplo

2) Si el café se vende a \$15,75 el kilo, ¿cuánto cuestan 3 kilos y medio?

3) Ayelén está aprendiendo a multiplicar decimales. En la escuela le dieron como tarea resolver los siguientes cálculos

a)  $25 \times 5,7 = \dots\dots$  b)  $2,5 \times 5,7 = \dots\dots$  c)  $0,25 \times 57 = \dots\dots$  d)  $5,7 \times 0,25 = \dots\dots$

Ella dice que fue muy fácil porque sólo tuvo que hacer una cuenta,  $25 \times 57 = 1425$  y después usar siempre este resultado. ¿Cómo hizo Ayelén para resolver todos los cálculos usando esa cuenta?

El primer problema permitirá al docente conocer las diferentes estrategias con que cuentan los alumnos y el segundo problema tiene por objetivo poner en evidencia la relación que existe entre el producto de números enteros y el de decimales, utilizando, además, las propiedades del producto de un número por una potencia de 10.

En el caso del problema 19, algunas posibles formas de resolución son:

$$\checkmark \quad 25 \times 5,7 = 25 \times 57 : 10 = 1425 : 10 = 142,5$$

$$\checkmark \quad 2,5 \times 5,7 = 25 : 10 \times 57 : 10 = 25 \times 57 : 100 = 1425 : 100 = 14,25$$

- ✓ Otros alumnos podrían recurrir a transformar la escritura decimal en fraccionaria, utilizar lo que saben de producto de fracciones para operar y finalmente volver a transformar la escritura fraccionaria en decimal.

$$\frac{25}{1} \cdot \frac{57}{10} = \frac{1425}{10} = 142,5$$

- ✓ También es posible que algunos alumnos conozcan el algoritmo de la multiplicación de decimales y utilicen argumentos como este: se multiplican los números como si no tuvieran coma, luego se suman los lugares que hay detrás de la coma en ambos números y el resultado tendrá esa cantidad total de lugares después de la coma. Por ejemplo en el cálculo d)  $5,7 \times 0,25$  tenemos en total 3 lugares después de la coma, por lo tanto el resultado 1425 debe tener tres lugares decimales y queda 1,425. En este caso es importante que durante la puesta en común puedan explicitarse los motivos por los cuales se “corren” las comas en las multiplicaciones de números expresados en forma decimal. A continuación mostramos una posible explicación:

$$\begin{array}{r} 5,7 \\ \times 0,25 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 10} \\ \xrightarrow{\times 100} \end{array} \quad \begin{array}{r} 57 \\ \times 25 \\ \hline 285 \\ \underline{1140} \\ 1425 \end{array}$$

$$1,425 \xleftarrow{\div 1000} 1425$$

Se multiplican 5,7 y 0,25 por 10 y por 100 para transformarlos, respectivamente en números naturales. Luego se opera con naturales ( $57 \times 25 = 1425$ ). Y como para llegar a este resultado hubo que multiplicar por 1000, para llegar al resultado final habrá que dividir por 1000, lo que permite obtener 1,452

Una vez finalizada la puesta en común el docente podrá proponer la resolución de otros cálculos o problemas. Esto permitirá que los alumnos tengan ocasión de volver a poner en juego las estrategias adquiridas hasta el momento. Por ejemplo:

4) Resolvé los siguientes cálculos. Explicá cómo hiciste en cada caso.

$$5,74 \times 3,2 = \quad 5,48 \times 35,2 = \quad 3,2 \times 0,0034 = \quad 7,8 \times 8,65 =$$

5) *¿Cuál es la superficie, en metros cuadrados, de un terreno rectangular que tiene 13,50m de frente por 35,60 m de fondo?*

6) *En el supermercado el litro de leche cuesta \$ 3,85 y en el almacén, la misma marca se vende a \$ 4,05 el litro. ¿Cuánto dinero ahorra por mes, comprando en el supermercado, una persona que compra 14 leches semanales?*

7) *Estos son los precios de un almacén que vende productos sueltos*

*Harina 4,35 el Kg*

*Azúcar 5,25 el kg*

*Arroz 8,65 el kg*

*María compró  $3\frac{1}{2}$  kg de harina,  $4\frac{1}{4}$  kg de azúcar y 1 kg y medio de arroz. ¿Le alcanza con \$ 50? ¿Cuánto le sobra o le falta?*

Este último problema incluye algunos datos en expresión fraccionaria, lo que permitiría seguir trabajando la conversión entre diferentes registro de escritura de números racionales, trabajada con anterioridad.

Otro aspecto importante a tener en cuenta al realizar el trabajo con operaciones con expresiones decimales es el de incluir el análisis de algunas propiedades del producto de decimales, haciendo énfasis en aquellas propiedades que implican una ruptura con los conocimientos que los alumnos tienen a partir de sus experiencias con números naturales, como por ejemplo: “la multiplicación agranda y la división achica” para referirse a que si multiplicamos un número natural por otro, el resultado obtenido será mayor que cualquiera de los números multiplicados y si dividimos un número natural por otro, el cociente será menor que el dividendo.

8) *Sin hacer la cuenta completá con mayor o menor. Después verificá tus respuestas haciendo la cuenta. Podés usar una calculadora.*

a)  $345 \times 0,78 \dots\dots\dots 345$

b)  $54 \times 1,2 \dots\dots\dots 54$

c)  $576 \times 0,9 \dots\dots\dots 576$

d)  $326 \times 4,3 \dots\dots\dots 326$

Una vez realizada la actividad anterior es importante realizar una puesta en común que permita a los alumnos discutir acerca de los resultados obtenidos y llegar a una conclusión colectiva.

A continuación el docente podría continuar el trabajo proponiendo actividades como las siguientes:

9) *¿Por qué número se puede multiplicar al 34 para que el resultado sea mayor que 34? ¿Hay una única posibilidad?*

10) *¿Por qué número se puede multiplicar al 34 para que el resultado sea menor que 34? ¿Hay una única posibilidad?*

11) *Encontrá dos números que al ser multiplicados den por resultado 4,56. ¿Cuántas respuestas posibles hay?*

- División

Proponemos comenzar el trabajo con problemas donde haya que dividir números enteros, pero en un contexto en el que sea pertinente expresar el resultado en forma decimal. En ese sentido se sugiere, nuevamente, comenzar con problemas en el contexto del dinero y continuar luego con problemas en otro contexto, por ejemplo el de las medidas de longitud, que permite a los alumnos usar lo que saben acerca de los múltiplos y submúltiplos del metro y su relación con las expresiones decimales. Luego se podría continuar el trabajo con problemas que impliquen la división de un decimal por un entero y por último sugerimos abordar aquellos problemas que requieran de la división de decimales.

Por ejemplo, el docente podría comenzar pidiendo a los alumnos que resuelvan los siguientes problemas:

12) *Para el cumpleaños de Marta, sus 8 amigas juntaron \$ 282. Si todas pusieron la misma cantidad para el regalo, ¿cuánto puso cada una?*

13) *Marcelo fue al kiosco y compró 12 alfajores iguales. Gastó 42 pesos. ¿Cuánto le costó cada alfajor?*

14) *A lo largo de los 16 km del tramo de una autopista, se colocan 25 carteles indicadores. Si la distancia entre un cartel y el siguiente es siempre la misma, ¿cuántos km separan un cartel del siguiente?*

En el caso del problema 29, algunas posibles formas de resolución son:

✓ Como  $7 \times 4 = 28$ , entonces  $70 \times 4 = 280$ . Esto quiere decir que si fueran 4 amigas tendrían que poner 70 pesos cada una para juntar \$280 y 50 centavos más cada una para juntar los dos pesos que faltan para llegar a 282. Pero como son el doble de amigas (8 es el doble de 4) entonces alcanza con poner cada una la mitad de lo que pondrían si fueran 4, es decir que cada una debe poner \$35 (la mitad de 70) con 25 centavos (la mitad de 50). La respuesta final sería 35,25.

✓  $\$282 : 8 = \$282 : 2 : 2 : 2 = \$141 : 2 : 2 = \$70 \text{ con } 50 \text{ centavos} : 2 = \$35 \text{ con } 25 \text{ centavos}$ . Como ya se ha trabajado la notación decimal para los centavos, la respuesta puede escribirse como \$35,25

✓ 
$$\begin{array}{r} 282 \quad | \quad 8 \\ \underline{42 \quad 35} \\ 2 \rightarrow 200 \quad | \quad 8 \\ \underline{40 \quad 25} \\ 0 \end{array}$$

Para el problema 31 algunas posibles formas de resolución son:

✓ Como 16 es más chico que 25, el resultado va a ser menos de 1 km (no alcanza para 1 km) entonces, antes de dividir, transformo los 16 km en 160hm y ahora divido por 25. Me da 6 hm y me sobran 10hm que podría seguir dividiendo por 25 pero como otra vez es 10 menos que 25, ahora transformo los 10hm en 100dam, que dividido 25 es igual a 4. Es decir me da un resultado final de 0km, 6 hm y 4 dam. Como me preguntan cuántos km hay entre un cartel y el siguiente la respuesta final es 0,64km.

✓ Como 16 es menor que 25, transformo los 16 km en metros y luego utilizo el algoritmo de división de números naturales ( $16\text{km} = 16000 \text{ m}$ .  $16000 : 25 = 640 \text{ m}$ ). Por último transformo los 640m en km ( $640\text{m} = 0,64 \text{ km}$ )

Antes de pasar a trabajar con problemas que impliquen la división entre dos expresiones decimales, aconsejamos realizar actividades que permitan a los alumnos utilizar lo que saben acerca de la multiplicación y división de un número por la unidad seguida de ceros y/o sus conocimientos acerca de las operaciones con fracciones decimales y equivalencia de fracciones. Por ejemplo:

15) Sabiendo que  $425:17=25$ , usa ese resultado para calcular

a)  $4,25 : 17 =$

b)  $425 : 1,7 =$

c)  $42,5 : 1,7 =$

d)  $4,25 : 0,17 =$

Verificá tus resultados usando una calculadora.

La idea es que una división entre expresiones decimales puede ser pensada como una división entre enteros.

Algunas formas de resolver la actividad anterior son:

a)  $(4,25 \times 100 : 17) : 100 = 425 : 17 : 100 = 25 : 100 = 0,25$  (si multiplico el dividendo por 100, entonces tengo que dividir el resultado final por 100)

b)  $425 : 1,7 = \frac{425}{1,7} = \frac{425 \times 10}{1,7 \times 10} = \frac{425 \times 10}{17} = \frac{425}{17} \times 10 = 25 \times 10 = 250$

c)  $42,5 : 1,7 = \frac{425}{10} : \frac{17}{10} = \frac{425}{17} = 25$

En este caso se escriben las fracciones decimales y se opera con fracciones.

d)  $4,25 : 0,17 = \frac{425}{100} : \frac{17}{100} = \frac{425}{17} = 25$

Una vez finalizada la resolución se hará una puesta en común y se analizarán las diferentes estrategias utilizadas.

Por último y para que los alumnos tengan ocasión de volver a poner en juego lo aprendido, el docente puede proponer problemas como los siguientes:

16) Un pack de 6 gaseosas de litro y medio pesa 10,8 kg. ¿Cuánto pesa cada botella?

17) Marina trabaja en un kiosco que tiene una fotocopiadora. Cobran \$ 0,15 cada copia. Hoy Marina recaudó \$ 37,95 en fotocopias. ¿Cuántas copias hizo?

18) Juan compró un terreno rectangular que tiene una superficie de 1160,25 m<sup>2</sup>. Si el terreno tiene 25,5m de frente, ¿cuántos metros tiene de fondo?

19) Felipe tardó 6 horas y media en recorrer una distancia de 620,75 km. ¿A qué velocidad promedio hizo el viaje?

Es necesario recordar que la introducción del algoritmo debe hacerse una vez que los alumnos cuenten con un bagaje de estrategias de resolución que apelen al uso de propiedades matemáticas. En el caso de que surja el algoritmo como una de las formas de resolución planteadas por los alumnos, el docente propiciará el análisis del algoritmo y su comparación con otras formas de resolución. En el caso de la división de expresiones decimales, se debe propiciar la transformación de dicha división en una división equivalente entre enteros y utilizar el algoritmo de la división de enteros.

Por ejemplo, el problema 34 se resuelve mediante la división entre 1160,25 y 25,5, que es equivalente a dividir  $116025 : 2550$ .

Para finalizar el trabajo de operaciones con expresiones decimales proponemos que los alumnos resuelvan problemas que impliquen más de una operación, por ejemplo:

20) *Pedro quiere comprarse una heladera. En un negocio de venta de electrodomésticos le ofrecen las siguientes opciones:*

1. *\$1626 en un pago en efectivo.*
  2. *12 cuotas de 145,50 cada una.*
  3. *La mitad en efectivo y el resto en 6 cuotas mensuales sin interés*
- 
- a) *¿Cuánto le cuesta la heladera si elige la opción 2?*
  - b) *¿Cuánto debe pagar cada cuota si elige la opción 3?*
  - c) *¿Cuánto ahorra si elige las opciones 1 o 3 en lugar de elegir la opción 2?*

## La enseñanza de la proporcionalidad en el segundo ciclo

Pensar la enseñanza de la proporcionalidad en un apartado distinto al de operaciones puede parecer forzado pues no se puede enseñar a multiplicar y a dividir sin apoyarse en problemas de proporcionalidad simple. Es más, no apoyarse en este contexto para iniciar el trabajo con multiplicación genera obstáculos para la construcción de su sentido.

Cuando los niños comienzan a resolver problemas utilizando la suma, los enunciados hacen referencia a un solo tipo de cantidades o a cantidades de distinto tipo que pueden incluirse en una clase más amplia, lo que permite sumarlas, y les decimos a los niños que sólo se pueden sumar “cosas iguales”.

<i>Me regalaron 5 caramelos y yo tenía 4 caramelos guardados, ¿cuántos tengo ahora?</i>	<i>Alejandro llevó a la escuela 4 caramelos y 5 bombones. ¿Cuántas golosinas llevó?</i>
5 caramelos + 4 caramelos = 9 caramelos	5 caramelos + 4 bombones = 9 golosinas pensando en 5 golosinas + 4 golosinas

Cuando se presenta la multiplicación como “suma abreviada” a partir de un cálculo:

$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5$  el significado queda reducido al de “veces” y, cuando se traslada a un problema con cantidades, uno de los factores es un escalar ( el número de veces) y no una cantidad.

$$\$5 + \$5 + \$5 + \$5 = 4 \times \$5 = \$20$$

De este modo la operación no aparece como respuesta para resolver algo nuevo. Y por ejemplo, pueda dar lugar a situaciones como esta:

Producción de un niño

*Escribí un problema que se resuelva con  $3 \times 3$*

*Mi mamá tiene 3 televisores, 3 cuchillos, 3 tenedores. ¿Cuántas cosas tiene?*

Frente a la consigna, el niño recupera la idea de suma (como reunión) y resuelve sumando los mismos números. También cabe preguntarse, si la multiplicación es una suma, ¿por qué no seguir sumando? ¿Solo se trata de economía en la escritura?

Esta “entrada” al tema también explica un error frecuente como este:

*Tengo 3 cajas y en cada caja hay 6 libros, ¿cuántos libros hay en total?*

$$3 + 6 = 9$$

La suma ha sido un procedimiento eficaz hasta ese momento y el niño no reconoce que lo que es distinto en este nuevo tipo de problema es que los números corresponden a cantidades diferentes: cajas y libros. En esta situación no tiene sentido reunirlos en una clase más amplia de “cosas”. La “novedad” del campo multiplicativo está en la posibilidad de resolver situaciones en las que se relacionan dos tipos de cantidades distintas:

Compré 5 paquetes de figuritas. En cada paquete vienen 4 figuritas. ¿Cuántas compré? $5 \times 4 = 20$ figuritas paquetes figuritas por paquete	Para preparar un menú se piensa en 5 platos y 4 postres ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? $5 \times 4 = 20$ platos postres opciones	¿Cuál es el volumen de un prisma de $5 \text{ cm}^2$ de bas y 4 cm de altura? $5 \times 4 = 20$ $\text{cm}^2 \quad \text{cm} \quad \text{cm}^3$ superficie longitud volumen
---	---	---

Al iniciar el trabajo sobre multiplicación con problemas de proporcionalidad sencillos se gana en significatividad y, aunque los niños resuelvan sumando al inicio, están reconociendo una escritura nueva, de una operación nueva, para situaciones también nuevas.

Por ejemplo, si conocemos que 1 paquete tiene 4 figuritas y queremos saber cuántas figuritas tienen 6 paquetes iguales para repartirlos entre amigos, se está planteando un problema en el que uno de los datos –la cantidad de figuritas por paquete– es una constante de proporcionalidad. Otra posibilidad sería averiguar cuántos paquetes se compraron si se tienen 28 figuritas o cuántas figuritas tienen 3 paquetes si sabemos que en 6 paquetes hay 24 figuritas, lo que da lugar a pensar que la mitad de paquetes habrá la mitad de figuritas, usando propiedades de la proporcionalidad.

Desde esta perspectiva, el trabajo en el segundo ciclo podrá apoyarse y dar continuidad a lo trabajado en el ciclo anterior sobre multiplicación y división. Sin embargo, la mirada del primer ciclo está más centrada en la resolución de “casos particulares” que en la descripción de la forma en la que se relacionan estas cantidades. Por ejemplo, retomando el caso de las figuritas, reconocer que la cantidad total ( $t$ ) depende de la cantidad de paquetes ( $p$ ) de modo tal que  $t = 4xp$  lo que también puede escribirse  $p = t : 4$ , da cuenta de un mayor nivel de generalización que calcular cuántas figuritas hay en una cantidad particular de paquetes dada.

La posibilidad reconocer un fenómeno que cambia, advertir relaciones entre cantidades de distinto tipo y describir matemáticamente esta relación para estudiarla es clave para avanzar en la posibilidad de hacer matemática en etapas siguientes y merece un espacio especial en el segundo ciclo.

Las relaciones de proporcionalidad permiten describir gran cantidad de procesos y relaciones de naturaleza y complejidad muy diversa, vinculados a diferentes aspectos de la realidad. A la vez, el estudio de estas relaciones permite articular contenidos ligados al estudio de las unidades de medida, los números racionales, las propiedades de las operaciones, profundizando su comprensión.

La construcción del concepto de proporcionalidad es un proceso de muy largo plazo y que requiere la articulación cuidadosa de las propuestas en cada etapa.

Como decíamos antes, en el primer ciclo los alumnos resuelven situaciones de proporcionalidad simple al multiplicar o dividir, usando las propiedades de manera implícita cuando calculan el doble de una cantidad porque corresponde al doble de otra o suman las cantidades correspondientes a otras dos para encontrar el valor que corresponde a la suma.

En el segundo ciclo estas propiedades tendrán que explicitarse. Panizza y Sadovsky señalan “no se trata de que el docente anuncie en segundo o tercer grado que estos son problemas de proporcionalidad. Se trata, en cambio, de que los recupere explícitamente como tales en el momento en que la proporcionalidad adquiere- en sexto y séptimo grado- el estatuto de un contenido a aprender”

Los chicos podrán analizar, por ejemplo, que si se duplica el dinero que se tiene, se duplica los kilogramos de fruta que se pueden comprar; si se triplica el dinero, se triplica el peso, si se reduce el dinero a la mitad, se reducen los kilos de fruta a la mitad. Es decir que: *Si una cantidad se multiplica o se divide por un número, lo mismo ocurre con la cantidad correspondiente.*

De igual forma, si sumamos, por ejemplo, \$ 20 y \$ 10, tendremos un pago de \$ 30, y si sumamos las cantidades correspondientes de la otra magnitud, los kilos que se compran con \$20, más los kilos que se compran con \$10, obtenemos la cantidad correspondiente a \$ 30. Esto puede expresarse: *Si dos cantidades se suman entre sí, al resultado le corresponde la suma de las cantidades correspondientes.*

Aunque, en general, no surge espontáneamente en las resoluciones producidas por los alumnos, también es posible utilizar la resta en el sentido antes mencionado.

Claro está que para que estas propiedades puedan explicitarse no basta presentar problemas en los que solo aparecen tres cantidades. Habrá que calcular distintos valores y preguntarse qué

pasa con otros, distintos de los incluidos inicialmente en los datos del problema para describir cómo se relacionan las cantidades.

*Cuatro amigos fueron sacaron pasajes para viajar juntos y pagaron \$120.*

*a) ¿Cuántos pasajes para el mismo destino se pueden comprar con \$60? ¿Y con \$240?*

*b) ¿Cuánto cuestan 6 pasajes? ¿Y 12?*

*c) Si el vendedor usa la calculadora para saber el precio total, ¿qué cuenta hace cuando le piden una cierta cantidad de pasajes?*

En cada caso habrá que determinar si el enunciado de la situación es suficiente o es necesario agregar restricciones. En el caso anterior se dice que todos los pasajes son para el mismo destino, si se trata de precios de artículos hay que aclarar que no hay ninguna oferta, etc. Cabe aclarar que, aunque se hagan estas aclaraciones, el modelo de la proporcionalidad tiene sus límites cuando se aplica a situaciones reales. Por ejemplo, si sabemos que en una carnicería el kg de carne cuesta \$25 podemos anticipar que 3 kg de carne del mismo corte nos costarán \$75 y que pagaríamos \$125 por 5kg. Sin embargo, en una situación real, si vamos a comprar 15 kg o 30 kg para un asado para muchas personas no esperamos que se mantenga el precio por kilo. De todos modos suponer que el precio se mantiene nos permite anticipar cuánto “costarían” esas cantidades y evaluar si el descuento que pueden ofrecernos nos resulta conveniente.

Si pretendemos que los problemas que se resuelven en la escuela ayuden a los alumnos a desarrollar esta competencia fuera de ella es muy importante dar espacio para este tipo de análisis. En el mismo sentido habrá que incluir casos en los que no pueda anticiparse el valor de una cantidad cuando se conoce otra y otros en los que la relación esté bien definida pero no sea de proporcionalidad.

<p>Aunque el peso de un bebé aumenta con la edad no es cierto que si a los 3 meses pesa 5 kg a los 6 meses vaya a pesar 10kg, aunque podamos seguir su evolución a través de tablas estadísticas.</p>	<p>Si dos hermanos se llevan exactamente 3 años de diferencia, conociendo la edad de uno podemos afirmar la edad del otro sumándole 3. La relación está bien definida y cuando aumenta la edad de uno aumenta la del otro, pero este aumento no es proporcional.</p>
---	--

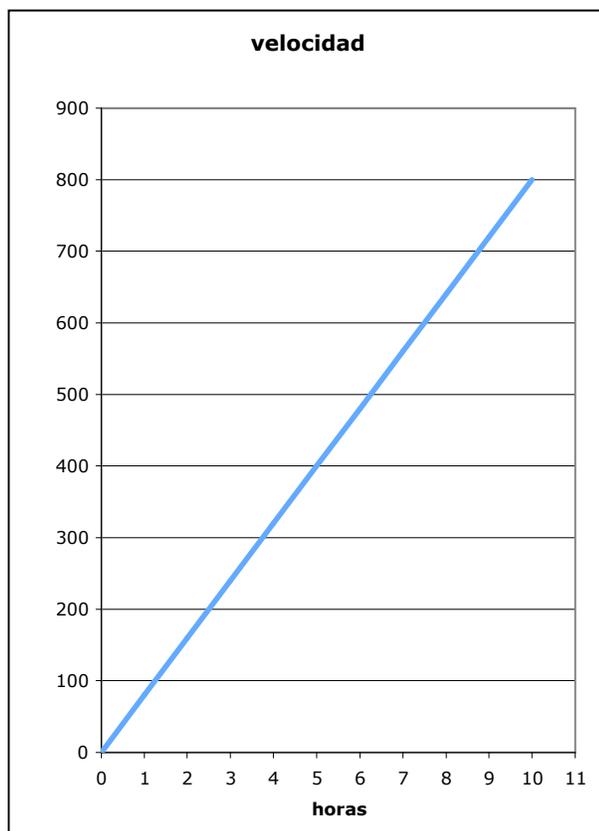
Es habitual que, al inicio del trabajo de proporcionalidad, todas las situaciones que se presentan sean directamente proporcionales. Esto hace que, sobre ese conjunto recortado de problemas, sea cierto que si “aumenta-aumenta” el problema se puede usar usando las propiedades de la proporcionalidad directa y si “aumenta-disminuye”, inversa. Sin embargo, y tal como se ve en los ejemplos anteriores, esta regla no es cierta en general, así que debemos evitar su uso.

Por otra partes en el trabajo matemático con una noción es necesario conocer en qué casos es posible usarla para resolver y también conocer sus límites, es decir en qué problemas no es posible usarla, lo que nos llevará a ofrecer repertorios de situaciones variados, donde no sea evidente que “son de proporcionalidad”. Para hacerlo será interesante incluir información contenida en distintos tipos de gráficos y textos informativos sobre situaciones en estudio en Ciencias Sociales o Naturales como evolución de población, relación entre tierras cultivadas y desmonte, contaminación, aprovechamiento del agua potable, etc.

Además de tener en cuenta una variedad de contextos de uso, lo que llevará naturalmente a usar distintas magnitudes y distintos tipos de números, también habrá que cuidar la variedad en el tipo de tareas, este es: hallar elementos del conjunto de llegada y del conjunto de partida, comparar situaciones de proporcionalidad entre magnitudes del mismo tipo para comparar e interpretar el sentido de las constantes, decidir si una situación es de proporcionalidad directa, inversa o no etc.

También habrá que analizar distintos procedimientos para identificar las propiedades utilizadas e incluir distintas representaciones como tablas, gráficos y enunciados verbales.

Cabe señalar que, aún en sexto grado, la interpretación de gráficos cartesianos puede resultar un desafío excesivo para los niños si no se ha hecho antes un trabajo específico para este tipo particular de representación. Además de la relación que se busca representar, por ejemplo la distancia recorrida por un vehículo en función del tiempo manteniendo una velocidad constante, están involucradas en la representación otras dos relaciones proporcionales: las escalas utilizadas para eje que muchas veces quedan implícitas. Por ejemplo:



velocidad		Escala distancia		Escala tiempo	
horas	km	cm	km	cm	horas
0	0	0	0	0	0
1	80	1	100	0,5	1
2	160	2	200	1	2
3	240	3	300	1,5	3
4	320	4	400	2	4
5	400	5	500	2,5	5
6	480	6	600	3	6
7	560	7	700	3,5	7
8	640	8	800	4	8
9	720	9	900	4,5	9
10	800	10	1000	5	10

Previamente a la presentación de un problema tendremos que tener muy presente cuáles son las unidades en las que se van a expresar las cantidades, lo que también afectará el tipo de números a utilizar, ya que esto puede afectar, y mucho, la complejidad del desafío.

### Acerca del alcance de los contenidos en cada grado

En 4º grado el trabajo en el campo multiplicativo se centra, tal como lo planteamos en el apartado correspondiente, en la flexibilización del uso de multiplicaciones y divisiones con números naturales. En este sentido se trabajará con cantidades discretas. Cabe aclarar que si bien se usan habitualmente las expresiones decimales para dar cuenta de los precios, lo que nos hace pensar en una magnitud continua como la longitud, estas cantidades funcionan a los fines prácticos como discretas pues los alumnos pueden operar con naturales expresando los precios en centavos ya que no hay subunidades más pequeñas.

El análisis de los procedimientos producidos por los alumnos, apoyando el control de los resultados en la razonabilidad del valor en el contexto de la situación, llevará a recuperar y precisar las relaciones multiplicativas (*a el doble de... le corresponde el doble, al triple de..., a la mitad de..., a la cuarta parte de...*) y aditivas (*a la suma de... le corresponde la suma de...*).

En 5° grado habrá que avanzar planteando problemas donde no se da el valor unitario y las cantidades podrán estar expresadas con números naturales y decimales de uso frecuente, comenzando por ejemplo con 25, 50 o 75 centésimos para que este avance acompañe el que se plantea para el trabajo con los números y las operaciones. Es importante tener en cuenta que, si bien se avanza en simultáneo, si el objetivo de una clase es la recuperación de propiedades de las proporcionalidad el desafío de cálculo no tendría que ser excesivo para no obstaculizar ese análisis.

Además de enunciados presentados a través de un texto, o de una tabla, es posible incluir por ejemplo algunos gráficos estadísticos sencillos como los pictogramas, tanto para interpretarlos como para producirlos en función de algún tema en estudio que lo requiera.

Del mismo modo que al hacer un gráfico se busca que esta tarea aporte a la comprensión o la comunicación de lo que se estudia, y no se haga “porque sí”, el hacer una tabla, o no, para resolver tendría que ser una decisión del alumno si es que el problema se presenta a través de un texto. De otro modo se restringe la posibilidad de tomar decisiones y fundamentar la conveniencia del uso de una representación u otra. También se corre el riesgo de cambiar un estereotipo como “la regla de tres” en otro. Al respecto, y dado que los alumnos pueden resolver apoyándose en distintas propiedades, no siempre es necesario “pasar por la unidad” usando esta regla ni promoverla.

Se busca la elaboración de recursos de cálculo adecuando los mismos a las diferentes situaciones presentadas, pensando en sistematizar lo aprendido en 6to grado, cerrando un proceso rico en relaciones. Por ejemplo, es fácil calcular el precio de 300 g de jamón sabiendo que 150g cuestan \$12,75 si se advierte que 300 es el doble de 150 y se calcula el doble de 12,75 lo que se puede hacer mentalmente de distintas formas; pasar por la unidad en cambio puede resultar más difícil pues requiere calcular  $12,75 : 150$ . De este modo, y si bien pasar por la unidad es un procedimiento que se mecaniza fácilmente, no siempre es el más conveniente.

Tal como afirmábamos en la introducción de este apartado, es importante dar lugar a la presentación y análisis de distintas situaciones para determinar si presentan o no una regularidad que cumpla con las propiedades de la proporcionalidad directa.

En 6° grado el desafío será avanzar en los procedimientos de resolución de problemas donde intervienen magnitudes de distinto tipo como las vistas hasta el momento y del mismo tipo como es el caso de escalas donde, por ejemplo, 1 cm representa 50 cm. En este último caso la constante es un número 0,02 y se pierde la referencia a las cantidades. Cuando las cantidades son de distinto tipo la constante mantiene la referencia a las mismas, por ejemplo 80 Km/hora.

Reflexionar sobre las propiedades que se usan en los distintos procedimientos de resolución para decidir cuál usar según los números involucrados marca el sentido del avance, incluyendo la posibilidad de elegir también si usar una representación decimal o fraccionaria para operar.

Relacionar la constante de proporcionalidad con el valor que corresponde a la unidad no es evidente para los alumnos y esta vinculación debe ser objeto de trabajo en este grado, así como la interpretación del significado de la constante en el contexto del problema. Por ejemplo:

*Si sabemos que 15 fotocopias cuestan \$1,50 y se pide el precio de 7 fotocopias, es posible:*

- *dividir primero por 15 para saber el precio de una fotocopia y luego multiplicar por 7*
- *advertir que 1,5 es 1/10 de 15 y, sabiendo que esa la relación tiene que ser constante para cualquier par de valores, que si se multiplica por 1/10 la cantidad de fotocopias se obtiene el precio.*

Aunque las cuentas que se hagan podrían ser las misma la forma de pensar el problema no es la misma. También habría que discutir que la constante puede plantearse de dos formas: en el ejemplo anterior  $0,1 \text{ \$/f}$  (cada fotocopia vale  $\$ 0,1$ ) o  $10 \text{ f/\$}$  ( con  $\$1$  se pagan 10 fotocopias).

En este grado será interesante explorar cómo varían las respuestas al cambiar los datos dando lugar al estudio de una “familia” de problemas en lugar de centrarnos en “un” problema, lo que contribuye a los procesos de generalización.

Comparar situaciones donde los mismos tipos de cantidades se relacionan de distinta forma, como al comparar mezclas, ayudará a los alumnos a aproximarse al concepto de razón, contribuyendo a su vez a la idea de número racional como cociente.

### **Propuestas de actividades**

A continuación se presentan algunas alternativas para trabajar con estos contenidos en el ciclo a partir de una secuencia para 6º grado centrada en la explicitación y el análisis de los distintos procedimientos que es posible poner en juego para resolver situaciones de proporcionalidad directa, pudiendo evaluar la conveniencia de usar uno u otro.

La secuencia se inicia proponiendo situaciones que los alumnos pueden resolver con propiedades de la proporcionalidad ya utilizadas en años anteriores, para luego reflexionar acerca de esas propiedades y posteriormente pasar a utilizar la constante de proporcionalidad.

Luego se proponen actividades para realizar adecuaciones en función de distintos propósitos.

Si bien la potencia de este tema hace que se dediquen actividades específicas, su tratamiento está íntimamente relacionado con la multiplicación y división de números naturales y racionales por lo que resulta naturalmente articulado con los desarrollos planteados en los apartados anteriores. El tratamiento en clase de estas actividades llevará, necesariamente, a profundizar los conocimientos de los alumnos sobre estas operaciones.

Otras propuestas de actividades, con sus correspondientes análisis didácticos, que desarrollan propuestas acordes a los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios, pueden encontrarse en

- Cuadernos para el Aula Matemática 4, 5 y 6, disponibles en:

<http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/>

- Matemática, fracciones y números decimales. 6º grado. Apuntes para la enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección General de Planeamiento Educativo. Dirección de Currícula y Enseñanza. 2006

[http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri\\_mate.php?menu\\_id=20709](http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menu_id=20709)

- Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas. En Documento de Actualización Curricular, Consejo Provincial de Educación, Pcia. de Río Negro En: <http://www2.educacion.rionegro.gov.ar/v2005/gcurri/matematica/matemat.htm>

### 1. Secuencia para analizar relaciones entre cantidades y comparar distintos procedimientos para calcular valores de cantidades que se corresponden proporcionalmente.

La secuencia que está prevista para ser desarrollada en 6° grado, puede ser adaptada variando los contextos y los tipos de números para ser desarrollada en 5to o 4to, en función de los alcances ya señalados.

Para el trabajo con la secuencia se sugiere dividir la/s actividades en etapas que se desarrollan en varias clases y, en cada clase, pueden realizarse una o más actividades, dependiendo del ritmo de trabajo de los alumnos. En cualquier caso habrá que asegurarse de hacer un cierre recuperando el estado de avance del trabajo al finalizar cada clase, y cada etapa. Esta explicitación es central para poder dar continuidad al proceso de estudio.

Asimismo se buscará dar lugar a los momentos planteados para la gestión de la clase en la introducción general, aunque éstos podrían darse en más de una clase.

Lo importante aquí es dar lugar a que los alumnos tomen decisiones en relación a su producción personal, puedan comunicar sus procedimientos y resultados, se puedan comparar las diferentes producciones realizadas para determinar si son correctas o no, o si pueden mejorarse dando los argumentos necesarios y que el docente ayude a los alumnos a formular las conclusiones a las que arribe el grupo de la clase en un registro escrito que se convierte en la memoria de lo actuado. La lectura y revisión de este registro, en el que también deben quedar las preguntas que surgen y que quedan pendientes de respuesta, permite no solo dar continuidad al trabajo sino volver sobre esa enunciación para modificarla ampliándola o ajustando el vocabulario utilizado.

Al finalizar este proceso se podría llegar a una formulación similar a la siguiente, lo que no significa que este lenguaje sea el que se utilice en las primeras conclusiones elaboradas por los alumnos que son mucho más coloquiales:

- ✓ Cuando las dos magnitudes que se relacionan en un problema lo hacen de modo tal que al doble de una de ellas le corresponde el doble de la otra, o a la mitad de una de ellas le corresponde la mitad de la otra, etc., esas magnitudes reciben el nombre de directamente proporcionales.
- ✓ En las relaciones de proporcionalidad directa se cumple que a la suma de dos cantidades de una magnitud le corresponde la suma de las dos cantidades correspondientes de la otra.
- ✓ Si se dividen los dos valores correspondientes de ambas magnitudes se obtiene siempre un mismo valor, llamado constante de proporcionalidad directa, que cooresponde al valor de la unidad.

Por ejemplo:

	x 2						
Cantidad de yerba en kg	3	1 1/2	3 1/4	1	6	4	
	+						=
Precio en \$	24	12	26	8	48	32	x 2
	+						=

$$\frac{24}{3} = \frac{12}{1\frac{1}{2}} = \frac{26}{3\frac{1}{4}} = \frac{8}{1} = \frac{48}{6} = \frac{32}{4} = 8 = K$$

En este problema la constante de proporcionalidad representa el precio de 1kg de yerba.

También es importante, cada vez que sea posible y sin forzar la situación, generar preguntas que permitan explorar cómo variaría la respuesta a una pregunta si cambia uno de los datos usados para hallarla, para promover el proceso de generalización de la noción en estudio.

Etapa	Actividades	Observaciones
1	1	Esta actividad permite hacer un primer diagnóstico acerca de los conocimientos de los alumnos sobre proporcionalidad. Los números elegidos favorecen la aplicación de estrategias multiplicativas y asociativas: como 4 es la mitad de 8, se necesita la mitad de gelatina y la de agua; para 12 porciones puedo sumar lo que necesito para 4 más lo que necesito para 8; 30g es la cuarta parte de 120g así que alcanza para 2 porciones y 45 se puede pensar como 30 más la mitad de 30, etc. Si los niños recurren mecánicamente al pasaje por la unidad, será necesario poner en evidencia estas relaciones en la puesta en común y plantear otros problemas donde se adviertan relaciones de dobles y triples antes de pasar a la actividad 2.
2	2,3 y 4	El problema 2 da lugar, nuevamente, al uso de estrategias multiplicativas y a discutir, si se usa la suma, qué cantidades son las que se pueden sumar. Asimismo se analiza cómo calcular cuando una cantidad no es, necesariamente, múltiplo de otra, lo que se termina de explicitar luego de resolver el problema 3. Si no se desea abrir tanto el conjunto de datos, lo que tiene su interés desde el punto de vista del manejo de la información, el maestro puede traer una receta para que todos trabajen sobre esos datos. En ese caso interesa mantener primero el cálculo para 2, 4 y 6 porciones para dar lugar al uso de la multiplicación y la suma para luego presentar el 10 lo que llevará a buscar la unidad. En el problema 4 aparecen expresiones fraccionarias sencillas que permiten usar esas operaciones en el campo de los racionales, usando descomposiciones, aunque los alumnos no hayan trabajado antes con ellas. Se puede aplicar lo que ya se sabe sobre las operaciones con fracciones en un nuevo contexto o también se puede aprender a operar con fracciones en este contexto.
3	5	Este problema, que tiene el propósito de revisar lo hecho para explicitar conclusiones y sistematizarlas, da lugar también a una evaluación de los avances en el aprendizaje en relación con lo detectado en 1. Se puede realizar en pequeños grupos para luego comparar las producciones, y ajustarlas, para tener una primera “síntesis teórica”, incluyendo la explicitación del uso de la constante. A continuación se podría pedir a los alumnos que identifiquen o calculen las constantes de los problemas anteriores y que expliquen cómo podrían utilizarlas para resolverlos, indicando qué representan esas constantes en el contexto de cada uno de los problemas.
4	6 y 7	En esta etapa se trata de reutilizar las estrategias ya explicitadas en nuevos contextos que, a la vez, requieren poner especial atención al uso de las unidades. También se incluyen distintos tipos de tareas, promoviendo la comunicación y la argumentación y se plantea la discusión de las condiciones que se necesitan para poder usar este modelo.
5	8 y 9	En esta etapa se propone trabajar con cantidades del mismo tipo poniendo en juego es la noción de razón como índice comparativo entre dos cantidades, es decir trabajar la proporcionalidad en situaciones de comparación de razones. Este tipo de situaciones permite retomar la noción, ya trabajada, de fracción equivalente.
6	10	Además de dar lugar al análisis de los alcances y usos más frecuentes de la

	<p>proporcionalidad, esta actividad permite evaluar el trabajo realizado en la secuencia. Se puede dar, a cada alumno un par de problemas para que, en forma individual haga el análisis (uno donde se pueda usar y otro no) para luego reunir en pequeños grupos a los que trabajaron sobre los mismos problemas para comparar las respuestas y eventualmente ajustarlas y, finalmente poner en común el trabajo realizado por toda la clase.</p>
--	--

### Actividades que pueden usarse para adecuar la secuencia en función de distintos propósitos

En todas las actividades de la secuencia se ha previsto que los desafíos de cálculo no sean importantes para priorizar el establecimiento y análisis de relaciones. Si se desea flexibilizar el uso de operaciones con números racionales basta agregar, luego de haber llegado a las conclusiones previstas para cada etapa, dos o tres preguntas para calcular nuevos valores con otros números o pedir que se respondan las mismas preguntas cambiando el par inicial de datos o la constante.

Para este tema la “dificultad” del desafío cuando se presenta a los niños depende de la posibilidad de interpretar el sentido de la constante en función de la familiaridad que se tenga con el contexto en que se plantea la situación (lápices por caja, \$ por kilo, kilómetros por hora, gramos por centímetro cúbico), del tipo de datos:

- cantidades de igual (mezclas, escalas) o distinta naturaleza (precios y pesos, envases y objetos por envase)
- cantidades discretas que requieren uso de números naturales o continuas que involucrará, a su vez, el uso de escrituras fraccionarias o decimales
- cantidades expresadas con la misma o con distintas unidades de medida de una misma magnitud
- cantidades que son, o no, múltiplos unas de otras
- situación presentada en un texto escrito, una tabla, un gráfico y necesidad de cambiar el tipo de representación utilizada.

Asimismo no es lo mismo calcular valores que se corresponden a uno dado que tener que determinar la constante para comparar relaciones o justificar por qué una relación puede clasificarse como directamente proporcional.

En este sentido, distintas combinaciones de estos factores, o pequeñas variaciones en los datos, pueden dar lugar a problemas de muy distinta complejidad. De este modo es posible mantener la estructura de la secuencia, o de una parte, para adaptarla en función de los conocimientos disponibles en el grupo de alumnos. Sí es importante asegurar una primera etapa de exploración y producción de procedimientos variados, comparación y análisis de los mismos para determinar su validez y conveniencia, sistematización de estos procedimientos y nuevas oportunidades de utilización en nuevos casos o explorando cómo se modifican las respuestas cuando se modifican los datos. También hay que incluir variedad de tareas como calcular valores, analizar o comparar procedimiento realizado por otros, comunicar conclusiones, argumentar sobre la validez de un procedimiento o una afirmación.

Por ejemplo, en 4to grado se podrían utilizar las primeras 3 actividades, que involucran el uso de números naturales y se podrían incluir otros problemas similares buscando flexibilizar el reconocimientos de relaciones de múltiplos entre cantidades y el uso de la suma y la multiplicación en lugar de resolver de manera automática “pasando por la unidad”.

La organización de los datos en tablas ayuda a poner en evidencia las relaciones entre los valores de las distintas cantidades.

En 5to grado se puede avanzar hasta la actividad 5, luego la actividad 7 y finalizar con la 10 seleccionando, por ejemplo, 5 enunciados.

## 2. Actividades para usar la proporcionalidad directa en el contexto particular de los porcentajes

Entre los usos más frecuentes de la proporcionalidad se encuentran los cálculos de porcentajes y el trabajo con escalas. En esta ocasión sólo nos referiremos al trabajo con porcentajes. Podemos comenzar el trabajo discutiendo la siguiente situación con los alumnos:

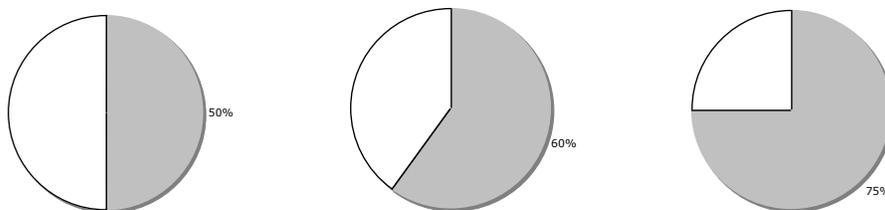
*Los profesores de Educación Física de la escuela hicieron una encuesta y dicen que de cada 5 chicos, 3 prefieren el fútbol a cualquier otro deporte.*

*Si les preguntamos a 10 chicos qué deporte les gusta, ¿cuántos tendrían que responder que les gusta el fútbol? ¿Y si les preguntamos a 50 o a 100?*

Para responder los alumnos pueden apelar a las estrategias adquiridas al trabajar con razones proporcionales, con la particularidad de que en este caso el denominador de la razón que se busca es 100. Finalizada la resolución el docente institucionalizará lo siguiente: Aquellas razones cuyo denominador es 100 pueden representarse mediante porcentajes. Por ejemplo en el caso del problema anterior como  $3/5$  equivale a  $60/100$  esto puede escribirse usando el símbolo de %, es decir 60% y se lee 60 por ciento.

En el caso particular de la encuesta habrá que aclarar con los alumnos que expresar el resultado como porcentaje permite apreciar fácilmente la relación entre las partes pero no indica, por ejemplo en este caso, que la escuela tiene 100 chicos y que el fútbol les gusta a 60 de ellos.

Establecer relaciones de mayor y menor con el 50%, el 25%, el 75%, además de ayudar a comprender la idea de razón, también permite articular estas representaciones con su escritura fraccionaria o su representación en un gráfico de sectores. Con estos valores no hace falta recurrir al ángulo central y basta con los conocimientos sobre fracciones.



Una vez otorgado un primer significado a la expresión %, podrán realizarse problemas como los siguientes:

1) En un negocio de ropa están liquidando todos sus artículos con un 20% de descuento sobre el precio de lista. Completa la siguiente tabla.

Total de la compra (\$)	50		150	40	
Descuento (\$)		15			25

2) En un supermercado ofrecen un descuento del 20% sobre el total de la compra, todos los jueves, usando tarjetas de débito. Completa la siguiente tabla.

Total de la compra (\$)	50		150	40	
Total a pagar (\$)		60			100

Es importante que luego de resueltos los dos problemas se haga un análisis comparativo de ambos. En el problema 1 hay que calcular el descuento mientras que en el 2 hay que calcular lo que se debe pagar. El docente puede guiar el análisis con preguntas como las siguientes.

- ¿Puedo usar el primer problema para resolver el segundo? ¿Cómo?
- Para averiguar el total a pagar, ¿es lo mismo calcular el 20% de la compra y restárselo al total que calcular el 80% del total de la compra? ¿Por qué? ¿Cuál de los dos procedimientos resulta más económico?

También es importante que los alumnos dispongan de un repertorio de estrategias de cálculo mental para el cálculo de porcentajes. La construcción de estas estrategias puede favorecerse resolviendo actividades como las que proponemos a continuación.

3) Sabiendo que el 10% de 460 es 46, podrías calcular mentalmente los siguientes porcentajes. Explica cómo pensaste en cada caso.

- 5% de 460=
- 15% de 460=
- 30% de 460=
- 50% de 460=
- 2% de 460=

4) Calcular mentalmente qué porcentaje representan

- 35 de 70=
- 20 de 80=
- 45 de 105=
- 35 de 35=
- 16 de 24=
- 15 de 150=

Una vez finalizada esta actividad el docente puede mostrar a sus alumnos cómo usar una calculadora para el cálculo de porcentajes y pedirles que la utilicen para verificar sus resultados. Otro tipo de actividades que favorecen la adquisición de diferentes estrategias de cálculo son aquellas donde los alumnos deben decidir acerca de la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones. Por ejemplo:

- 6) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá cómo lo pensaste.
- Para calcular el 12% de 460 se pueden sumar el 10% de 460 más el 2% de 460
  - Para calcular el 12% de 460 se puede calcular el 10% de 460 y luego a ese resultado calcularle el 2%
  - $\frac{1}{5}$  de una cierta cantidad equivale al 50% de esa cantidad
  - Para calcular el 50% de cualquier cantidad basta con dividirla por dos
  - Para calcular el 60% de cualquier cantidad basta con multiplicarla por 0,6
  - $\frac{3}{4}$  de una cierta cantidad equivalen al 75% de esa cantidad
  - El 25% de cualquier cantidad equivale a un cuarto de esa cantidad

A continuación proponemos otros problemas, en contexto cotidiano, para que los alumnos tengan ocasión de volver a utilizar las estrategias adquiridas.

7) Una encuesta realizada en un supermercado arrojó los siguientes resultados:

- Un 68% compara los precios de diferentes marcas antes de elegir un producto.
- Un 74% compara precios en diferentes negocios antes de comprar.

Si 350 personas declararon comparar precios en diferentes negocios antes de comprar:

- ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- ¿Cuántos comparan precios de diferentes marcas antes de elegir un producto?
- ¿Por qué si se suman los porcentajes da más de 100%?

8) Un negocio compra televisores a \$ 550 y los vende a \$690. ¿Cuál es el porcentaje de ganancia?

9) Camila compró en oferta un pantalón que costaba \$55 y pagó \$35. ¿Qué porcentaje de descuento le hicieron?

10) En un negocio de electrodomésticos un equipo de audio cuesta, al contado, \$629. Por esta semana hay una promoción y los venden a \$529. ¿Cuál es el porcentaje de descuento que ofrecen esta semana?

### 3. Actividades para diferenciar la proporcionalidad directa de la inversa y comparar sus propiedades

Proponemos comenzar la clase pidiendo a los alumnos que, reunidos en parejas, resuelvan los siguientes problemas:

1) *Un automovilista que viaja a 120km/h tarda 4 horas en ir desde una ciudad A hasta otra ciudad B.*

- ¿Cuánto tardaría si viajara a 80km/h?
- ¿Cuánto tardaría si disminuyera la velocidad a la mitad?
- ¿Qué distancia hay entre ambas ciudades?

2) *Una fábrica de perfumes vende sus productos en envases de diferentes tamaños. Puede envasar cierta cantidad en 150 frasquitos de 25ml cada uno. Completa la siguiente tabla.*

Capacidad de los frascos (ml)	Cantidad de frascos
25	
50	
	125
75	
	100

Finalizada la resolución se hará una puesta en común para analizar las estrategias utilizadas. El objetivo de estos problemas es que los alumnos puedan, en primer lugar, establecer las diferencias que existen entre estos problemas y los de proporcionalidad directa en el sentido de que en los anteriores ambas magnitudes relacionadas variaban en el mismo sentido, es decir que si una magnitud aumentaba la otra también lo hacía y viceversa, mientras que en estos problemas sucede lo contrario; cuando una aumenta, la otra disminuye. Pero estos aumentos y disminuciones responden a ciertas reglas: si una magnitud se duplica, la otra se reduce a la mitad, es decir que varían proporcionalmente en sentido inverso.

Para facilitar este tipo de análisis es que se usan números que permiten calcular mentalmente, pero luego de establecidas las conclusiones se puede plantear el cálculo de nuevos valores con otros números.

Puede utilizarse la tabla del problema anterior para mostrar estas relaciones, que el docente puede institucionalizar de la siguiente manera:

- ✓ Cuando las dos magnitudes que se relacionan en un problema lo hacen de modo tal que al doble de una de ellas le corresponde la mitad de la otra, o a la tercera parte de una de ellas le corresponde el triple de la otra, etc., esas magnitudes reciben el nombre de inversamente proporcionales.
- ✓ Si se multiplican los dos valores correspondientes de ambas magnitudes se obtiene siempre un mismo valor, llamado constante de proporcionalidad inversa.

Capacidad de los frascos (ml)	Cantidad de frascos
25	150
50	75
30	125
75	50
37,5	100

$$25 \times 150 = 50 \times 75 = 30 \times 125 = 75 \times 50 = 37,5 \times 100 = 3750 = K$$

Cabe señalar que, el hecho de que el docente sea el encargado de institucionalizar las nociones trabajadas, no significa que deba mostrar cómo aplicar reglas de resolución. Son los alumnos, quienes a partir de un trabajo reflexivo con los problemas, irán ampliando sus propias estrategias de resolución a medida que, a lo largo de su escolaridad, tengan la oportunidad de volver enfrentarse a ellas.

Se pueden proponer otras situaciones para que los alumnos tengan ocasión de utilizar las estrategias adquiridas hasta el momento. Por ejemplo:

*3) Julián compró un televisor en 12 cuotas iguales de \$75 cada una. ¿Cuánto debería haber pagado cada cuota si lo hubiera comprado en 36 cuotas sin interés? ¿Y si lo compraba en 6 cuotas, de cuánto hubiera sido cada cuota? ¿Cuánto costaba el televisor?*

*4) Para el cumpleaños de Belén, cinco de sus amigas decidieron juntar dinero para hacerle un regalo. Calcularon que poniendo \$12 cada una, podían comprarle la campera que necesitaba. A último momento tres amigas más decidieron sumarse al regalo. ¿Cuánto dinero deberá poner ahora cada una de sus amigas?*

Por último es importante destacar que, así como lo hicimos en el caso de la proporcionalidad directa, es necesario que los alumnos reflexionen acerca de los alcances y usos de la proporcionalidad inversa. Un buen ejemplo a trabajar podría ser la siguiente situación:

Para la construcción de una autopista, una empresa calculó que necesitaría contratar 40 obreros para realizar el trabajo en 60 días. ¿Cuántos días tardarán en realizar ese trabajo si la empresa contrata 60 obreros? ¿Y si contrata 120? ¿Y 240?

Problemas como el anterior tienen por objetivo mostrar que ciertos problemas, tradicionalmente utilizados para trabajar situaciones de proporcionalidad inversa, carecen de sentido pues no responden a situaciones genuinas de proporcionalidad inversa. No es cierto que duplicando el número de personas que realizan un cierto trabajo siempre se logre realizarlo en la mitad del tiempo, incluso en algunos casos hasta puede que tarden más.

## Secuencia 1: Dividir en 4to grado

### A. Distintas ideas para una misma cuenta

1. Don José tiene una fábrica artesanal de alfajores y arma cajas o bolsitas para preparar distintas ofertas. Tiene 72 alfajores y los acomoda en bolsitas colocando la misma cantidad

- Si armó 8 bolsitas, ¿cuántos alfajores puso en cada una? ¿Sobraron alfajores?
- ¿Podría armar 7 cajas y acomodar todos los alfajores? ¿Por qué?
- ¿Con que otras cantidades de alfajores puede armar las cajas para que queden todas iguales?
- Si pusiera 8 alfajores en cada caja, ¿cuántas cajas usaría?

2. Al día siguiente, Don José arma las cajas con los 59 alfajores que le trajeron de la cocina.

- Quiere armar cajas de media docena cada una. ¿Cuántas cajas necesita? ¿Sobran alfajores?
- Si arma cajas todas iguales pero de otra cantidad, ¿podría usar todos los alfajores? ¿Por qué?

3. En la fábrica están preparando galletitas de limón para meter al horno. Hoy hicieron 42. En cada asadera/placa/ entran 18 galletitas.

- ¿Cuántas asaderas necesitan? ¿Por qué?
- ¿Todas las asaderas van a estar llenas?
- ¿Cómo cambian las respuestas si entraran 12 galletitas en cada asadera?

4. Sergio y tres amigos fueron a la terminal de micros. Sacaron pasajes para viajar juntos a una localidad cercana y pagaron \$120.

- ¿Cuánto costaba cada pasaje?
- Después de ellos llegó una familia para viajar a la misma localidad y pagaron \$180 ¿Cuántas personas eran?
- En otra ventanilla se sacaron 5 pasajes y se pagaron \$160. ¿Pensás que esas personas viajaban más cerca o más lejos que los amigos? ¿Por qué?
- Silvana tiene \$200 y tiene que sacar 8 pasajes, ¿ hasta cuánto puede pagar por cada pasaje?
- Si los pasajes que necesita salieran \$20, ¿podría comprar más pasajes? ¿Cuántos?

5. Inventen dos enunciados de problemas distintos que se puedan resolver con la cuenta  $50 : 6$ . En uno hay que repartir 50 objetos en 6 partes iguales y en otro hay que repartir 50 objetos en grupitos de 6 objetos cada uno.

## B. Distintas formas de hacer las cuentas de dividir

1. Una división se puede anotar de distintas formas.

Observen cómo hicieron Lucía, Bianca y Sofía para resolver este problema.

Hay 60 lápices de colores y queremos poner 7 en cada cartuchera.

¿Para cuántas cartucheras alcanzan? ¿Sobran lápices? ¿Cuántos?

Lucía	Bianca	Sofía
$60 : 7 = 8$	$\begin{array}{r} 60 \overline{) 7} \\ -56 \phantom{0} \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 60 \overline{) 7} \\ 4 \phantom{0} \\ \hline 8 \end{array}$

- ¿Piensan que todas resolvieron bien?
- ¿Cuáles son las respuestas a las preguntas del problema?
- ¿Cómo piensan que descubrieron el resultado 8?
- ¿Por qué Sofía no escribió el 56?
- ¿Qué manera de anotar les parece mejor? ¿Por qué?

2. Resuelvan estas divisiones como Bianca

- $50 \overline{) 8}$
- $50 \overline{) 9}$
- $60 \overline{) 9}$
- $500 \overline{) 8}$
- $5000 \overline{) 9}$
- $6000 \overline{) 9}$

3. Cuando los números que hay que dividir son más grandes la cuenta se hace más larga y, antes de hacerla, conviene estimar cuántas veces entra el divisor en el dividendo usando multiplicaciones. Para cada una de estas cuentas decidí entre qué números está el resultado.

- $862 \overline{) 8}$
- $862 \overline{) 10}$
- $862 \overline{) 20}$

4. Observen cómo hicieron ahora Lucía, Bianca y Sofía para resolver este otro problema.

Hay 385 lápices y queremos poner 12 en cada cartuchera,

¿Para cuántas cartucheras alcanzan?

Lucía	Bianca	Sofía
$385 : 12 =$ $385 = 360 + 25$ $120 : 12 = 10$ $120 : 12 = 10$ $120 : 12 = 10$ $25 : 12 = 2$ y sobra 1	$\begin{array}{r} 385 \overline{) 12} \\ -120 \phantom{0} \\ \hline 265 \phantom{0} \\ -120 \phantom{0} \\ \hline 145 \phantom{0} \\ -120 \phantom{0} \\ \hline 25 \phantom{0} \\ -24 \phantom{0} \\ \hline 1 \end{array}$ <p>El resultado es 32 y sobra 1.</p>	$\begin{array}{r} 385 \overline{) 12} \\ -360 \phantom{0} \\ \hline 25 \phantom{0} \\ -24 \phantom{0} \\ \hline 1 \end{array}$ <p>El resultado es 32 y sobra 1.</p>

- ¿Por qué piensan que Lucía anotó  $360 + 25$ ?
- ¿Qué habrá pensado Sofía para encontrar 30?
- ¿En que se parecen las cuentas que hicieron Bianca y Sofía? ¿En que se diferencian?

5. Usar dobles y multiplicaciones por 10 ayuda a estimar el resultado de una división.

a) Observen cómo resolvió Edgar la cuenta del problema anterior:

$$\begin{array}{r}
 385 \overline{) 12} \\
 \underline{-240} \quad 20 \\
 145 \quad 10 \\
 \underline{-120} \quad \underline{2} \\
 25 \\
 \underline{-24} \\
 1 \phantom{0} \\
 \phantom{1} \phantom{0} /
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 12 \quad 120 \\
 2 \quad 24 \quad 240 \\
 4 \quad 48 \quad 480 \\
 8 \quad 96 \quad 960
 \end{array}$$

b) Usen la tabla que hizo Edgar para resolver:

$$567 \overline{) 12} \qquad 600 \overline{) 12} \qquad 786 \overline{) 12}$$

c) Estimen entre qué números está el resultado de

$$450 : 12 \qquad 825 : 12 \qquad 1450 : 12$$

6. Usando las tablas de dobles también se pueden calcular otros resultados.

Usen las tablas siguientes para calcular los valores que se indica en cada caso y luego resuelvan las divisiones.

a) 920 15

1	15		
2	30	3	....
4	60		
8	120	6	....

b) 1685 24

1	24		
2	48	3	....
4	96		
8	192	5	....

7. a) Resuelvan estas cuentas.

$$2467 : 35 \qquad 6210 : 46$$

b) Jonathan dice que él no usa la tabla de dobles, primero multiplica el divisor por 10, después hace la mitad para tener por 5 y después multiplica otra vez por 10 para tener por 100 y por 50. Observen cómo resolvió y decidan si su método es más fácil o más difícil que el que usaron ustedes.

$$\begin{array}{r}
 2467 \overline{) 35} \\
 \underline{1750} \quad 50 \\
 717 \quad 10 \\
 \underline{350} \quad \underline{10} \\
 367 \quad 70 \\
 17
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10 \quad | \quad 5 \quad 100 \quad 50 \\
 \hline
 350 \quad | \quad 175 \quad 3500 \quad 1750
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6210 \overline{) 46} \\
 \underline{4600} \quad 100 \\
 1610 \quad 20 \\
 \underline{920} \quad 10 \\
 690 \quad 5 \\
 230 \quad \underline{135} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10 \quad | \quad 5 \quad 100 \quad 50 \\
 \hline
 460 \quad | \quad 230 \quad 4600 \quad 2300
 \end{array}
 \qquad
 920$$

## Secuencia 2: Decimales en 5to grado

1. Martina está leyendo la propaganda de un supermercado con las ofertas de la semana. Estos son algunos de los artículos que aparecen con sus respectivos precios:

artículo A: \$3,05; artículo B: \$3,50.  
artículo C: \$5,10; artículo D: \$5,05.

a) ¿Cuál es más caro? ¿Y más barato?

b) Si Martina tiene que pasarle los precios a su mamá por teléfono, ¿cómo puede hacerlo? Escribí cómo se pueden leer esos precios.

c) Compará con tus compañeros si encontraron distintas formas de leer los precios.

d) Anotá los precios de otros tres artículos usando decimales.

2. En un negocio tienen distintas etiquetas para poner precios en la vidriera



a) Escriban todos los números posibles utilizando las cuatro etiquetas.

b) Ordenen de menor a mayor los números obtenidos en el punto anterior.

3. Cuando Lucas fue al pediatra, éste le dijo que ya medía 1 metro con 30 centímetros.

a. ¿Cómo pudo anotar el médico esa altura de Lucas?

1,3 m                      1,030m                      130 cm

b) Los hermanitos de Lucas también fueron medidos. Estas fueron sus medidas: Florencia, 1 metro con 8 centímetros; Ramiro, 1 metro con diecinueve centímetros. Escribí, en metros, las alturas de los hermanos.

c) ¿Sabés cuánto medías cuando naciste? ¿Y cuando estabas en primer grado? ¿Y hoy? Si podés conseguir algunos datos de tu crecimiento registrálos. Si no, medíte ahora y registrá tu altura.

4. Dos chicos discuten sobre quién es más alto

Lucio: *Estoy seguro que 1,5 es más.*

Sergio: *No. 1,45 es mayor que 1,5, porque 45 es mayor que 5.*

¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

5. Lee la siguiente reseña de una importante atleta argentina:

### **Noemí Simonetto**

Nació en Buenos Aires en 1926 y llegó a estar entre las mejores atletas del ranking mundial en las temporadas 1945–1946. Precisamente en 1945 fue primera en los 80 metros con vallas (11,5) y en salto en largo (5,76) y quinta en salto en alto (1,55). Un año más tarde fue tercera en 80 metros con vallas, cuarta en alto, y séptima en largo (5,64). Su gran hazaña fue la obtención de la medalla de plata en salto en largo en los Juegos Olímpicos de Londres 48, con un registro de 5,60. Es una de las tres mujeres argentinas que conquistaron una medalla –todas plateadas– en los Juegos Olímpicos y la atleta que logró la mayor cantidad de galardones en los Sudamericanos: 11 títulos, 3 medallas de plata y 3 de bronce (un total de 17).

Secretaría de Gabinete y Gestión Pública | Secretaría de Medios de Comunicación  
| <http://www.argentina.gov.ar/argentina/portal/paginas.dhtml?pagina=1843>

- a) Identificá a qué cantidades corresponden los números decimales que aparecen en el texto y, en cada caso, qué significa cada una de las cifras del número.
- b) Otra argentina, Solange Witteveen, tuvo el récord sudamericano de salto en alto. En 1999, con 1,93m obtuvo la medalla dorada de los Juegos Panamericanos. ¿Cuánto más alto que Noemí pudo saltar Solange en ese año?
- c) Para salto en largo en 2010, en la categoría cadetes de hasta 13 y 14 años, el récord fue de 6,06 m para Maximiliano Benítez y de 5,25 m para Noelina Maderieta. ¿Cuál es tu récord? Hacé una marca con tiza en el patio y, con la ayuda de un compañero, estimá cuál es la longitud de tu salto. Pueden organizar un campeonato y ver si alguna chica o chico del grupo se destaca.  
 Datos Confederación Argentina de Atletismo  
<http://cada-atletismo.org/biografias.php>
6. En un rincón de la carpintería del padre de Lucio, junto a una puerta donde se acumulan recortes y sobrantes, hay unas varillas con estos números anotados en lápiz sobre la madera:  
 1,35 1,005 0,57 0,625 1,025 1,505
- a) Si ninguna de las varillas supera el alto de la puerta, ¿qué medidas tienen las varillas?
- b) Lucio quiere dos de un metro y tres de medio metro, ¿puede conseguir en el rincón lo que está buscando? ¿Tendría que cortar algunas? ¿Cuáles?
7. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? ¿Por qué?
- a. 0,60 es mayor que 0,2 porque 60 es mayor que 2
- b. 0,60 es mayor que 0,2 porque la cifra de los décimos es mayor
- c. 0,04 es igual a 0,40 porque los ceros después de la coma no valen nada.
- d. 0,19 es mayor que 0,2 porque 19 es mayor que 2
8. Esteban y Julieta estaban jugando a descubrir números  
 Esteban dice: tengo uno fácil, se trata de un número mayor que 3,85 y menor 3,87.  
 Julieta dice: con ese dato solo no puedo descubrir el número.
- a) ¿Quién tiene razón? Por qué?
- b)
- c) Escribí una pista para descubrir el 4,25.
- d) Escribí una pista para descubrir el 4,256.
- e) Escribí una pista para el 1,02 y otra para 1,002
9. Utilizando sólo sumas y los números 0,1; 0,01 y 0,001 escribí una cuenta cuyo resultado sea
- a) 0,65
- b) 0,29
- c) 0,734
- d) Verificá tus resultados usando una calculadora
10. ¿Qué números obtuvo Yahir en cada caso, si con la calculadora
- a) Sumó 4 veces 0,1 y 15 veces 0,01
- b) Sumó 3 veces 0,1; 8 veces 0,01 y 12 veces 0,001
- c) Verificá tus resultados usando una calculadora
11. a) ¿Qué número hay que restarle a 5,78 para que el resultado sea 5,08? ¿Y para que sea 5,7? Verificá tus resultados usando una calculadora
- b) Juan también está haciendo cuentas con la calculadora. Escribe 5,465 y luego de hacer una resta aparece el 5,405. ¿Qué cuenta hizo? Usa la calculadora para verificar tu respuesta.

12. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? ¿Por qué?

a) 3,25 es mayor que 2,451 porque la parte entera 3 es mayor que 2.

b) 6,15 es menor que 5,651 porque 5,651 tiene más cifras.

c) siempre es mayor en número que tiene más cifras en la parte entera.

d) cuando a un número con dos cifras decimales se le suma 0,01 solo cambia la cifra de los centésimos.

### Secuencia 3 Relacionar cantidades en 6to grado

1. Para preparar 8 porciones de gelatina hay que mezclar 120g de gelatina en polvo con dos tazas de agua hirviendo. Revolver bien y a continuación agregar dos tazas de agua fría. Cada taza de agua equivale a 250 ml de agua.

- ¿Qué cantidad de gelatina en polvo se necesita para preparar 4 porciones? ¿Y para 12?
- ¿Qué cantidad de agua es necesaria en cada caso?
- ¿Cuántas porciones se pueden preparar con 30 g de gelatina en polvo?
- ¿Y con 45 g de gelatina en polvo?

2. Silvia vende masa para pizza. Para preparar 12 pizzas, usa 4 kg de harina.

a) Si le encargaron pizzas para un cumpleaños y compró 6 kilos de harina. ¿Cuántas pizzas va a preparar calculando que utilizará la misma cantidad de harina en cada pizza?

b) Compará cómo respondieron estos dos chicos y decidí si alguno de esos procedimientos es correcto:

<p>A Con más harina... más pizzas. Como son dos kilos más de harina se pueden hacer dos pizzas más, son catorce pizzas.</p>	<p>B Con cuatro kilos hace doce pizzas, así que con dos kilos hace seis. Entonces para seis kilos,... doce más seis,... dieciocho pizzas.</p>
---	---

b) Hacé una tabla donde se vea la relación entre la cantidad de pizzas y 2, 4, 6, 8, 10.. kilos harina.

c) ¿Cómo puede calcular rápido Silvia cuánta harina necesita si sabe la cantidad de pizzas que tiene que hacer?

d) ¿Y para calcular cuántas pizzas puede hacer a partir de una cantidad cualquiera de harina?

3. Buscá una receta de algo que te guste preparar, o comer, y copiala.

a) Hacé una tabla donde se vea, cuánto hay que usar de cada ingrediente para distintas cantidades de porciones.

Porciones	Ingrediente 1	Ingrediente 2	Ingrediente 3	Ingrediente ....
2				
4				
6				

b) Compará si los cálculos que hiciste para completar la tabla se parecen, o no, a los que hicieron dos de tus compañeros.

c) Decidan entre los tres cómo se podría completar una fila más para 10 porciones y anoten su procedimiento.

4. En un supermercado 3kg de yerba cuestan \$24.

a) Completá la siguiente tabla.

Cantidad de yerba en kg	3	1 1/2	3 1/4	1		
Precio en \$				48	32	

b) ¿Pensás que se podrían usar estos valores como dato para calcular cuánto costarían 300 kg de yerba? ¿Por qué?

5. En cada uno de los problemas 1 a 4 hay distintas cantidades que se relacionan.

a) Identificá y registrá, en cada caso, un par de esas cantidades A y B.

Por ejemplo para 1) A: cantidad de porciones y B: cantidad de gramos de gelatina.

b) Escribí qué cálculos se pueden hacer para encontrar el valor de B que le corresponde a 50 unidades de A.

c) Compará tus respuestas con las de dos compañeros. ¿Encontrás diferencias? Si es así registrálas. Si no, anotá cuál sería la “regla” para calcular B conociendo A.

6. Un auto que circula a velocidad constante tarda 10 minutos en recorrer 12 km.

a) ¿Cuántos km recorrería en 25 minutos?

b) ¿Cuánto tardará en recorrer 50 km si mantiene siempre la misma velocidad?

c) ¿Cuál es la velocidad del auto en “kilómetros por hora”?

d) Compará estas dos formas de resolver cuánto recorre el auto en 1 hora y media y cómo se puede saber qué distancia recorre el auto cuando se sabe el tiempo que dura el viaje.

<i>10 min</i>	<i>12 km</i>	<i>10 min</i>	<i>12 km</i>
<i>1 min</i>	<i>12 km : 10 min = 1,2</i>	<i>60 min</i>	<i>12 km x 6 = 72 km</i>
<i>km/min</i>			
<i>90 min</i>	<i>1,2 km/min x 90 min =</i>	<i>1 h</i>	<i>72 km</i>
<i>108 km</i>		<i>1,5 h</i>	<i>72 km x 1,5 = 108 km</i>
			<i>Para saber cuánto recorre hay que multiplicar el tiempo por 72.</i>
	<i>Para saber la distancia hay que multiplicar el tiempo por 1,2.</i>		

¿Por qué si en los dos casos da 108 km, la segunda respuesta es tan distinta?

e) ¿Por qué pensás que en el problema dice que la velocidad es constante?

7. a) Completá las siguientes tablas de proporcionalidad.

Cantidad de latas de durazno	Precio total (\$)
7	49,70
5	
	21,30
2	
	28,40

Km recorridos	Litros de combustible utilizados
50	
100	11
75	
450	
	27,5

- b) ¿Qué aclaraciones habría que hacer en cada caso para poder completar las tablas si no se hubiera dicho que son de proporcionalidad?
- c) Escribí cómo calcular una cantidad cualquiera en cada una de las tablas.

8. Una fábrica de jugo prepara sus jugos de naranja y durazno mezclando 2 litros de jugo de durazno cada 9 litros de jugo de naranja.

- a) ¿Cuántos litros de jugo de durazno se necesitarán para preparar la mezcla con 189 litros de jugo de naranja?
- b) Si se quieren preparar 605 litros de mezcla en total, ¿cuántos litros de cada clase de jugo se necesitarán?
- c) Si a una mezcla que ya está preparada se agregan 3 litros de jugo de naranja y 3 de jugo de durazno, ¿pensás que cambia el sabor? ¿Y si se agregan 3 litros de jugo de durazno y 10 litros de jugo de naranja?
- d) Escribí 3 ejemplos de cantidades de jugo de naranja y de durazno que se podrían agregar a la mezcla sin cambiar el sabor.

9. En el envase de un chocolate de 180 gramos puede leerse la siguiente información nutricional: valor energético, 538 kcal cada 100 gramos.

- a) ¿Cuántas kilocalorías ingiere una persona que se come todo el chocolate?
- b) Otro chocolate aporta 150kcal cada 30 gramos. ¿Cuál de los dos chocolates tiene mayor valor energético?

10. ¿Cuáles de las siguientes preguntas podrían responderse usando las propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa?

- a. La hermanita de Nicolás tiene un mes y mide 56cm. ¿Cuánto medirá cuando cumpla un año?
- b. En una bodega hay 50 toneles de vino de la misma capacidad. En total contienen 10.500 litros de vino. Se venden 35 toneles. ¿Cuántos litros de vino quedan en la bodega?
- c. La mamá de Luciana trabaja en una pizzería. Preparan empanadas y las cocinan en bandejas con capacidad para 24 empanadas. En el horno entran tres bandejas a la vez. ¿Cuántas veces, como mínimo, deberán cargar el horno para preparar 216 empanadas?
- d. En su casa, la mamá de Luciana prepara milanesas al horno. Si para cocinar 4 milanesas tardó 20 minutos, ¿cuánto tardará para cocinar 6 milanesas?
- e. Pablo juega al fútbol en el club de su barrio. En los dos últimos partidos hizo 2 goles en cada uno. ¿Cuántos goles hará en total si juega tres partidos más?
- f. Una fotocopiadora hace 30 copias por minuto. ¿Cuántas copias se pueden hacer en 2 minutos? ¿Y en 30 minutos?
- g. Marcela hace 30 flexiones de brazos en un minuto. ¿Cuántas flexiones puede hacer en 2 minutos? ¿Y en 30 minutos?
- h. Una empresa de telefonía fija cobra un abono de \$40 por mes, más \$0,07 por cada minuto de comunicación. ¿Cuánto deberá pagar una persona que habló durante 180 minutos? ¿Será cierto que si el mes que viene decide ahorrar y hablar sólo 90 minutos, deberá pagar la mitad de lo que pagó este mes?

En los casos afirmativos, encontrá las constantes y explicá qué representan en relación al problema. Si es necesario agregá algunas condiciones que tendrían que incluirse en los datos para que la respuesta sea válida.

En los otros casos, explicar por qué no se trata de relaciones de proporcionalidad directa.



ERROR: undefined  
OFFENDING COMMAND:

STACK: